Многомерный статистический анализ, эконометрика и моделирование реальных процессов // Труды X-й Международной школы-семинара / Под ред. В.Л. Макарова. Цахкадзор, 2020 г. – М.: ЦЭМИ РАН, 2020. – 160 с. (Рус.) ISBN 978-5-8211-0786-2

DOI: 10.33276/978-5-8211-0786-2-153-154

О КОЭФФИЦИЕНТЕ МЕДИАЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ КОПУЛЫ ГРАББСА

Ширяева Л.К. (Самара) [i]

Рассмотрим статистики Граббса (Grubbs, 1950), т.е. экстремальные стьюдентизированные отклонения наблюдений от среднего

$$T_n^{(1)} = \left(\max_{1\le i\le n}\{X_i\} - \bar{X}\right)/\mathrm{S}; \qquad T_{n(1)} = \left(\bar{X} - \min_{1\le i\le n}\{X_i\}\right)/\mathrm{S},$$

вычисленные по выборке из n значений нормально распределенной случайной величины X.

Известно, что $P(T_{n(1)} < t) = P(T_n^{(1)} < t)$. Обозначим: $F_n^{(1)}(t) = P(T_n^{(1)} < t)$; $\Lambda_\mathrm{n}(t_1, t_2) = P(T_{n(1)} < t_1, T_n^{(1)} < t_2)$. Рекурсивные соотношения для описания функций распределения $F_n^{(1)}(\cdot)$и $\Lambda_\mathrm{n}(\cdot)$ найдены в (Zhang, Keming, 2006) и (Ширяева, 2014) соответственно.

Согласно теореме Склара (Nelsen, 2006) существует единственная копула $\mathrm{C_n}$, так что

$$\Lambda_\mathrm{n}(t_1, t_2) = \mathrm{C_n}\left(F_n^{(1)}(t_1), F_n^{(1)}(t_2)\right).$$

Для оценивания параметра n копулы Граббса может быть применен непараметрический аналог метода моментов. Первый шаг метода предполагает оценивание по выборке из совместного распределения случайных величин некоторой меры их зависимости. Наиболее часто для этого используют коэффициенты ранговой корреляции Кенделла и Спирмена. В данной работе будет использован коэффициент медиальной корреляции β –Блумквиста (Blomqvist, 1950), так как вычисление его оценки требует на порядок меньше итераций, чем оценивание коэффициентов ранговой корреляции (Genest, Carabarín–Aguirre, Harvey, 2013). На втором шаге по найденной оценке находят оценку параметра копулы.

Для того, чтобы применить метод моментов следует найти теоретический коэффициент β–Блумквиста копулы Граббса. Формулу для вычисления Блумквиста копулы Граббса содержит

Теорема 1. Пусть $T_n^{(1,ts)} = max\left(T_n^{(1)}; T_{n,(1)}\right)$, $F_n^{(1,ts)}(t) = P(T_n^{(1,ts)} < t)$. Тогда коэффициент медиальной корреляции копулы Граббса равен

$$\beta_n = 4F_n^{(1,ts)}(Me_n) - 1,$$

где Me_n-медиана случайной величины $T_n^{(1)}$;

рекурсивное описание функции распределения $F_n^{(1,ts)}(\cdot)$ найдено в (Ширяева, 2014).

Для вычисления медины Me_n применялись

Теорема 2. В случае $3 \leq m \leq 6$ медиана Me_n равна

$$Me_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{Q_{\frac{n-1}{n}}}{Q_{\frac{n-1}{n}} + n - 2}},$$

где Q_s-квантиль уровня s случайной величины $F_{1;n-2}$, имеющей распределение Фишера – Снедекора с $k_1 = 1$ и $k_2 = n - 2$ степенями свободы.

Теорема 3. В случае $m > 6$ медиана Me_n является решением следующего уравнения

$$\int_{\tau_n^*}^{\frac{n-1}{\sqrt{n}}} f_n^{(1)}(t)dt = \frac{1}{2} - \frac{n}{2} P\left(F_{1;n-2} > \frac{(n-2)^2}{n}\right),$$

где$f_n^{(1)}(t) = \frac{dF_n^{(1)}(t)}{dt}$;$\tau_n^* = \sqrt{\frac{(n-1)(n-2)}{2n}}$.

В работе проведены численные расчеты коэффициента β–Блумквиста копулы Граббса. Полученные значения коэффициента были использованы для вычисления оценки параметра n копулы Граббса.

Литература

Grubbs F. Sample criteria for testing outlying observations, Ann. Math. Statist., 1950, **21**:1, pp. 27–58.

Genest C., Carabarín-Aguirre A., Harvey F. Copula parameter estimation using Blomqvist's beta, Journal de la Société Française de Statistique, 2013, Vol. 154 No.1, pp. 5–25.

Nelsen R. B. An introduction to copulas, Springer Series in Statistics, Springer–Verlag, New York, 2006.

Zhang J., Keming Y. The null distribution of the likelihood-ratio test for one or two outliers in a normal sample, TEST, 2006, **15**:1, pp. 141–150.

Ширяева Л. К. О нулевом и альтернативном распределении статистики критерия наибольшего по абсолютной величине нормированного отклонения, Изв. вузов. Матем., 2014. № 10. С. 62–78.

---

[i] **Ширяева Людмила Константиновна** – Самарский государственный экономический университет, Shiryeva_LK@mail.ru