Многомерный статистический анализ, эконометрика и моделирование реальных процессов // Труды X-й Международной школы-семинара / Под ред. В.Л. Макарова. Цахкадзор, 2020 г. – М.: ЦЭМИ РАН, 2020. – 160 с. (Рус.) ISBN 978-5-8211-0786-2

**DOI:** 10.33276/978-5-8211-0786-2-120-122

# ГОЛОТЕТИЧНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ПО ЛИНЕЙНОМУ ЭКЗОГЕННОМУ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОМУ ПРОГРЕССУ

***Проневич А.Ф. (Гродно), Хацкевич Г.А. (Минск)*** [i]

Рассмотрим двухфакторную производственную функцию

$$Y = F(K, L), \tag{1}$$

которая в результате влияния (Варшавский, 1984) научно-технического прогресса (НТП), заданного функциями технического прогресса (Sato, 1980)

$$\bar{K} = \varphi(K, L, t),\ \bar{L} = \psi(K, L, t),\ \text{при условии}\ \ \varphi(K, L, 0) = K,\ \psi(K, L, 0) = L, \tag{2}$$

трансформируется и переходит в функцию, зависящую от параметра $t$НТП,

$$\bar{Y} = F(\bar{K}, \bar{L}) = F(\varphi(K, L, t), \psi(K, L, t)) = \bar{F}(K, L, t).$$

В 60–70 годах XX столетия, после выхода двух работ (Solow, 1957; Stigler, 1961) будущих лауреатов Нобелевской премии по экономике Р. Солоу (1987 год) и Дж. Стиглера (1982 год), в научной литературе развернулась дискуссия по проблеме отличия влияния НТП от эффекта отдачи от масштаба для заданного производственного процесса. Полемика получила название «противоречие Солоу–Стиглера» (Solow–Stiglercontroversy) и была окончательно теоретически решена японским экономистом Р. Сато в 1980 году (Sato, 1980). Для решения данной проблемы Р. Сато предложена концепция голотетичной (holothetic) производственной функции и использована теория непрерывных групп преобразований, созданная выдающимся норвежским математиком Софусом Ли (Ли, 2011).

Следуя (Sato, 1980), производственную функцию (1) относительно заданного экзогенного НТП (2) будем называть *голотетичной*, если карта изоквант производственной функции (1) при преобразовании (2) остается инвариантной. При этом, понятие голотетичной функции тесно связано с нейтральностью НТП по Хиксу (Sato, 1980).

Основной теоретический результат Р. Сато заключается в следующем (Sato, 1980): *эффект от влияния НТП и эффект отдачи от масштаба являются независимыми явлениями и различимыми тогда и только тогда, когда производственный процесс описывается не голотетичной производственной функцией относительно заданного НТП.*

В данной работе описано все множество голотетичных производственных функций и, тем самым, решено «противоречие Солоу-Стиглера», в случае линейного экзогенного НТП.

**Основной результат.** *Пусть экзогенный НТП задан посредством линейных функций технического прогресса* $\bar{K} : (K, L, t) \to A(t)K + B(t)L,\ \bar{L} : (K, L, t) \to C(t)K + D(t)L,$ *где* *непрерывно дифференцируемые функции* $A, B, C$ *и* $D$ *такие, что* $A(0) = D(0) = 1,$ $B(0) = C(0) = 0$ *и* $A(t)D(t) \neq C(t)B(t).$ *Тогда класс голотетичных производственных функций относительно линейного экзогенного НТП имеет вид* $Y = F(Q(f) + P(f, L)),$ *где* $Q$ *– произвольная функция,* $P(f, L) = P(\gamma, L)_{|\gamma = f(K,L)} = \int \frac{dL}{c \cdot K(\gamma, L) + d \cdot L}{}_{|\gamma = f(K,L)}$ *(*$\gamma$ *– постоянная), числа* $a = A'(0), b = B'(0), c = C'(0), d = D'(0)$ *(штрих означает операцию дифференцирования), функция* $K = K(\gamma, L)$ *находится из уравнения* $f(K, L) = \gamma,$ *а функция* $f$ *определятся в зависимости от следующих случаев:*

1) *Если* $\lambda_1 = 0$ *есть собственное число матрицы* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$ *которому соответствует вещественный собственный вектор* $v^1 = (\alpha_1, \beta_1),$ *то* $f(K, L) = \alpha_1 K + \beta_1 L;$

2) *Если* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$ *– собственные числа матрицы A, которым соответствуют линейно независимые вещественные собственные векторы* $v^1 = (\alpha_1, \beta_1)$ *и* $v^2 = (\alpha_2, \beta_2),$ *то функция* $f(K, L) = (\alpha_1 K + \beta_1 L)^{\lambda_2} (\alpha_2 K + \beta_2 L)^{-\lambda_1};$

3) *Если* $\lambda_1 \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$ *двукратное собственное число матрицы A, которому соответствуют вещественные собственный* $v^1 = (\alpha_1, \beta_1)$ *и первый присоединенный* $v^2 = (\alpha_2, \beta_2)$ *векторы, то функция* $f(K, L) = (\alpha_1 K + \beta_1 L) \exp\left( -\lambda_1 \cdot \frac{\alpha_2 K + \beta_2 L}{\alpha_1 K + \beta_1 L} \right);$

4) *Если* $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_1 i$ *– существенно комплексное* $(\tilde{\lambda}_1 \neq 0)$ *собственное число матрицы A, которому соответствует собственный вектор* $v^1 = (\hat{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_1 i, \hat{\beta}_1 + \tilde{\beta}_1 i),$ *то функция*

$$f(K, L) = \left( (\hat{\alpha}_1 K + \hat{\beta}_1 L)^2 + (\tilde{\alpha}_1 K + \tilde{\beta}_1 L)^2 \right) \exp\left( -2 \frac{\hat{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_1} \operatorname{arctg} \frac{\tilde{\alpha}_1 K + \tilde{\beta}_1 L}{\hat{\alpha}_1 K + \hat{\beta}_1 L} \right).$$

**Литература**

*Sato R.* The impact technical change on the holotheticity of production functions. Review of Economic Studies, 1980, Vol. 47, No. 4, pp. 767–776.

*Solow R.* Technological change and aggregate production function. Review of Economics and Statistics, 1957, Vol. 39, No. 3, pp. 312–320.

*Stigler G.* Economic problems in measuring changes in productivity. Output, Input, and Productivity Measurement (National Bureau of Economic Research, Princeton), 1961, pp. 47–78.

*Варшавский А.Е.* Научно-технический прогресс в моделях экономического развития: методы анализа и оценки. М. Финансы и статистика, 1984. – 208 с.

*Ли С.* Теория групп преобразований: В 3-х частях. – М.: Ижевск. ИКИ, 2011.

---

[i] **Проневич Андрей Францевич** – ГрГУ им. Янки Купалы, pranevich@grsu.by;

**Хацкевич Геннадий Алексеевич –** Институт бизнеса БГУ, Khatskevich@sbmt.by