Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН
CENTRAL ECONOMICS AND MATHEMATICS INSTITUTE RAS

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

В.П. Гришухин

ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ СОВЕРШЕННЫЕ ОБЛАСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Препринт # WP/2016/320

МОСКВА
2016

Гришухин В.П. Первая и вторая совершенные области положительных квадратичных форм / Препринт # WP/2016/320. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 57 с. (Рус.)

Совершенная область квадратичных положительных форм есть конусная оболочка квадратичных форм ранга 1. Эти формы суть квадраты линейных форм, определяемых минимальными векторами совершенной решетки. Первая и вторая совершенные области соответствуют совершенным корневым решеткам A_n и D_n, соответственно. Эти решетки целочисленно порождены классическими системами корней A_n и D_n.

В этой работе дается обзор фактов о свойствах квадратичных форм первой и второй совершенных областей. Описываются некоторые их L-подобласти и соответствующие параллелоэдры. На примере форм и параллелоэдров этих совершенных областей демонстрируется ряд результатов, полученных за последнее время в теории параллелоэдров.

Большое место уделяется унимодулярным подмножествам множеств A_n и D_n. Множество A_n само унимодулярно, а для множества D_n дается описание всех его унимодулярных подмножеств. Коническая оболочка множества форм ранга 1, определяемых векторами унимодулярного множества, есть симплициальная L-подобласть соответствующей совершенной области. Эта работа есть обзор некоторых результатов работ, приведенных в списке литературы.

Ключевые слова: положительная квадратичная форма, параллелоэдр, точечная решетка.

Grishukhin V.P. The First and the Second Perfect Domains of Positive Quadratic Forms / Working paper # WP/2016/320. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2016. – 57 p. (Rus.)

A perfect domain of positive quadratic forms is a cone hull of quadratic forms of rank 1. Each rank 1 form is square of a linear form that is defined by a minimal vector of a perfect lattice. The first and the second perfect domains relate to the perfect root lattices A_n and D_n, respectively. These lattices are integrally generated by roots of classical roots systems A_n and D_n.

In this work a review of properties of quadratic forms of these domains is given. Some their L-subdomains and corresponding parallelotopes are described. Recent results of Theory of parallelotopes are applied to parallelotopes related to these perfect domains.

Unimodular subsets of the root systems A_n and D_n take a special attention. The root system A_n is itself a unimodular set. It is given a description of all unmodular subsets of the root system D_n. Cone hull of rank 1 forms related to vectors of unmodular system is a simplicial L-subdomain of the corresponding perfect domain. This work is a review of results obtained in papers given in the list of publications.

Keywords: positive quadratic form, parallelotope, lattice.

ISBN 978-5-8211-0739-8

Содержание

1 Предисловие

Я довольно давно занимаюсь исследованием параллелоэдров. Накопилось немало фактов и результатов в этой области. В этом препринте я пытаюсь их продемонстрировать на примере параллелоэдров первой и второй совершенных областей.

Параллелоэдр – это такой многогранник, параллельными сдвигами которого можно замостить пространство без зазоров и пересечений по внутренним точкам. Параллелоэдр, как всякий многогранник, описывается системой линейных неравенств. Левая часть каждого такого неравенства есть линейная функция, определяемая нормальным вектором фасеты многогранника, а правая часть есть некоторая функция от этого нормального вектора. Г. Ф. Вороной во второй части своего знаменитого мемуара [2] показал, что если нормальные векторы многогранника целочисленно порождают решетку, а правые части неравенств, определяющих этот многогранник, являются значениями положительной квадратичной формы, то этот многогранник есть параллелоэдр. Я называю такой параллелоэдр, *определяемый* квадратичной формой, *параллелоэдром Вороного*.

Поэтому Вороной стал изучать конус положительно определенных квадратичных форм. В частности он определил разбиение этого конуса на многогранные подконусы *совершенных областей*.

Каждая совершенная область определяется совершенной решеткой. Такая область есть конусная оболочка квадратичных форм ранга 1. Эти формы суть квадраты линейных форм, определяемых минимальными векторами соответствующей совершенной решетки. Поэтому каждая квадратичная форма совершенной области есть положительная линейная комбинация этих форм ранга 1. За исключением форм главной совершенной области, представление формы в виде суммы форм ранга 1 неоднозначно.

Кроме совершенных областей Вороной определил *L-области*. Это суть области форм, определяющих параллелоэдры одного и того же комбинаторного типа. Форма, лежащая на крайнем луче некоторой L-области, называется *реберной*, или *жесткой*. Параллелоэдр, определяемый реберной формой, назван С.С.Рышковым в [16] *коренным*. Я, не зная статьи Рышкова, в своих статьях на английском языке назвал его *rigid*, т.е. *жестким*.

Главная (или первая) совершенная область замечательна тем, что она есть единственная совершенная область, совпадающая с L-областью. Это связано с тем, что множество минимальных векторов совершенной корневой решетки A_n есть унимодулярное множество. Параллелоэдры главной области суть зонотопы специального вида. Они суть субмодулярные многогранники, играющие заметную роль в целочисленном программировании, в дискретном выпуклом анализе и многих областях комбинаторного анализа. Например, параллелоэдр, определяемый квадратичной формой, лежащей на центральной оси главной области, есть *пермутаэдр*, или *перестановочный многогранник*.

Форма, лежащая на центральном луче *второй* совершенной области пропорциональна форме решетки D_n^*, которая двойственна корневой решетке D_n. Только для четных $n = 2m$ эта форма является реберной. Решетка D_n совершенна, а множество ее минимальных векторов есть корневая система $\mathbb{D}_n$. Я называю параллелоэдр Вороного *параллелоэдром второй совершенной области*, если он определен квадратичной формой второй совершенной области, а контактные векторы его контактных граней порождают решетку

D_n^*. Определение контактных векторов и граней см. в разделе 3.

Проще всего исследуются те параллелоэдры второй совершенной области, которые определяются квадратичными формами с диагональной матрицей Грама. Я описываю ряд реберных форм такого типа. Среди этих форм находится реберная форма, найденная Вороным в своем мемуаре [2], но описанная им в другом базисе. Этого же типа являются реберные формы (отличные от форм ранга 1), общей L-области, описанной Барнсом и Тернером в 1972г. (см. [6]).

L-области, лежащие во второй совершенной области, наиболее просто описываются, если они определяются унимодулярными множествами. Все реберные формы такой L-области являются формами ранга 1. Векторы, определяющие эти формы, принадлежат соответствующему унимодулярному множеству. Это множество есть подмножество системы корней $\mathbb{D}_n$. Поэтому в этой работе я, в частности, изучаю такие унимодулярные подмножества. Фактически, повторяю в других терминах результаты С.С.Рышкова и Р.Эрдала 1994 года (см. [14]). Но впервые эти результаты были получены Г.Лёшом в 1990 году в трудно доступной диссертации [12].

В конце этой работы я описываю вторые совершенные области форм от n переменных для $n \leq 5$. Для $n = 3$ вторая совершенная область совпадает (эквивалентна) первой (главной) совершенной области.

Вторая совершенная область для $n = 4$ изучена многими авторами. В этом случае существует единственная, с точностью до положительного множителя, реберная форма, отличная от форм ранга 1. Она лежит на центральном луче этой области. Соответствующий коренной параллелоэдр есть правильный четырехмерный самодвойственный многогранник, называемый *24-ячейкой*. Он и является ячейкой Дирихле-Вороного решетки D_4^*, которая изоморфна совершенной корневой решетке D_n. Ее совершенная область разбивается на 64 L-области двух типов. Центральный луч совершенной области является крайним лучом каждой из этих 64 L-областей.

Для $n = 5$ я привожу лишь список из 6 типов попарно неэквивалентных реберных форм. Чтобы продемонстрировать работу моих методов, я в явном виде доказываю жесткость двух из этих форм.

2 Совершенные области

Г.Вороной [2] определил два многогранных разбиения конуса всех положительно полуопределенных квадратичных форм на области L-типа и совершенные области. С точностью до эквивалентности, т.е. с точностью до унимодулярного преобразования форм, существует единственная совершенная область, являющаяся одновременно и L-областью. Вороной называет эту область *главной*.

Каждая совершенная область есть конусная оболочка квадратичных форм $f_r(x) = \langle r, x\rangle^2$ ранга 1, где $\langle r, x\rangle^2$ есть скалярное произведение векторов r и x. Векторы r принадлежат множеству M минимальных векторов *совершенной* решетки. Здесь вектор r решетки называется минимальным, если он имеет минимальную норму m среди всех векторов решетки. Выбирая некоторый базис совершенной решетки, мы получаем *совершенную* форму. Совершенная форма $f(x) = \langle x, Ax\rangle$ по определению однозначно определяется множеством своих минимальных векторов. А именно, матрица Грама A совершенной формы однозначно определяется из следующей системы равенств

$$f(r) = \langle r, Ar\rangle = m \text{ для всех } r \in M,$$

где m есть минимальная ненулевая норма векторов совершенной решетки.

Пусть L есть совершенная решетка и M есть множество всех ее минимальных векторов. Пусть $\mathcal{F}(M)$ есть замкнутая совершенная область решетки L. Так как формы $f_r(x)$ для всех $r \in M$ суть крайние лучи области $\mathcal{F}(M)$, то любая форма $f \in \mathcal{F}(M)$ имеет следующее представление

$$f(x) = \sum_{r\in M} b_r f_r(x) = \sum_{r\in M} b_r \langle r, x\rangle^2,$$

где $b_r \ge 0$ суть неотрицательные веса минимальных векторов $r \in M$.

Веса b_r можно рассматривать как значения неотрицательной функции $b : M \to \mathbb{R}_+$. Пусть $M_b = \{r \in M : b_r > 0\}$ есть носитель функции b. Тогда форму $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x) = f_b(x) = \sum_{r\in M_b} b_r f_r(x).$$

Для любой размерности $n \ge 4$ существуют две знаменитые совершенные решетки, а именно, корневые решетки A_n и D_n. Множествами их минимальных векторов являются системы корней $\mathbb{A}_n$ и $\mathbb{D}_n$. Совершенная область $\mathcal{F}(\mathbb{A}_n)$ корневой решетки A_n совпадает с L-областью двойственной решетки A_n^*, т.е. она является *главной* (или *первой*) областью Вороного. Совершенную область $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$ корневой решетки D_n обычно называют *второй совершенной областью*.

Совершенная область разбивается на L-области или ее пересечения с L-областями. В размерности $n \le 5$ каждая L-область полностью содержится внутри некоторой совершенной области. В размерности 6 существует L-область, которая пересекается с двумя смежными совершенными областями $\mathcal{F}(\mathbb{E}_6)$ и $\mathcal{F}(\mathbb{E}_6^*)$ совершенных решеток: корневой решетки E_6 и ее двойственной E_6^*.

Но есть L-области, которые всегда полностью содержатся в совершенных областях. Эти области являются гранями совершенных областей и имеют вид

$$\mathcal{F}(U) = \{f_b(x) : f_b(x) = \sum_{r \in U} b_r \langle r, x \rangle^2\} \subseteq \mathcal{F}(M),$$

где $U \subseteq M$ является *унимодулярным* множеством. Множество U называется унимодулярным, если каждый его вектор целочисленно разлагается по векторам любого его базисного подмножества.

Система корней $\mathbb{A}_n$ обладает замечательным свойством. Само множество ее векторов является унимодулярным множеством и целочисленно порождает совершенную корневую решетку A_n, являясь множеством ее минимальных векторов.

Пусть дана некоторая совершенная область $\mathcal{F}(M)$, где M есть множество минимальных векторов совершенной n-мерной решетки L. Рассмотрим многогранник

$$P(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \leq f(p) \text{ для всех } p \in L^*\}, \tag{1}$$

где L^* есть двойственная к L решетка, и $f \in \mathcal{F}(M)$ есть некоторая квадратичная форма совершенной области $\mathcal{F}(M)$. Вороной показал в [1], что многогранник $P(f)$ есть параллелоэдр. Я называю его *параллелоэдром Вороного* совершенной области $\mathcal{F}(M)$.

В этой работе изучаются свойства и параллелоэдры первой и второй совершенных областей.

3 Параллелоэдры

Параллелоэдр - это многогранник, параллельными трансляциями которого можно замостить пространство без зазоров и пересечений по внутренним точкам. Многогранник является параллелоэдром тогда и только тогда, когда он и все его фасеты центрально симетричны, и проекция вдоль любой его грани коразмерности 2 есть снова параллелоэдр, т.е. есть параллелограмм или центрально симметричный шестиугольник. Пусть T есть разбиение пространства на параллелоэдры.

Кроме фасет центрально симметричными гранями параллелоэдра являются *контактные* (или в терминологии Н.П.Долбилина [33] *стандартные* грани). Грань называется контактной, если она может быть представлена как пересечение двух параллелоэдров разбиения T. Любой параллелоэдр P размерности n описывается следующей системой неравенств

$$P = P(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \leq a(p) \text{ для всех } p \in \mathcal{P}\}, \tag{2}$$

где $\langle p, x \rangle$ есть скалярное произведение векторов $p, x \in \mathbb{R}^n$, и $\mathcal{P}$ есть достаточно большое симметричное множество векторов, содержащее множество $\mathcal{P}_s$ нормальных векторов всех фасет P. Симметричность множества $\mathcal{P}$ означает, что если $p \in \mathcal{P}$, то и $-p \in \mathcal{P}$. (Сам Вороной в [2], имея в виду ДВ-ячейку (см. ее определение в (4) ниже), использует множитель 2 перед скалярным произведением $\langle p, x \rangle$).

Проекция паралелоэдра вдоль любой его грани коразмерности 2 есть параллелограмм или шестиугольник. Стороны этих многоугольников суть проекции фасет параллелоэдра.

Поэтому его фасеты образуют пояски, содержащие 4 или 6 фасет, соответственно. Три (с точностью до знака) нормальных вектора фасет 6-пояска лежат в двумерной плоскости, ортогональной граням коразмерности 2, порождающим этот 6-поясок. Так как эти три нормальных вектора линейно зависимы, то можно выбрать их знаки и длины так, чтобы их сумма была равна нулю. В случае, если такой выбор длин возможен для всех 6-поясков одновременно, то, согласно Вороному (см. [2]), нормальные векторы и их длины называются *каноническими*.

Если нормальные векторы фасет параллелоэдра в описании (2) имеют канонические длины, то, как показано в [39], множество $2A\mathcal{P}_s$ есть множество *фасетных* векторов параллелоэдра P, где A есть положительно определенная матрица. В этом случае правая часть $a(p) = \langle p, Ap\rangle$ есть положительно определенная квадратичная форма, а множество $\mathcal{P}$ целочисленно порождает n-мерную решетку L_p. Преимущество записи (2) состоит в том, что гиперплоскости

$$H_p(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x\rangle = a(p)\} \tag{3}$$

являются опорными для P в точности в контактных гранях (см. [39]). Соответствующий вектор p называется *контактным* вектором. Если p есть контактный вектор, то концевая точка вектора $\frac{1}{2}c_p = Ap$ есть центр контактной грани $F_p = H_p(a) \cap P$. Поэтому вектор $c_p = 2Ap$ есть вектор решетки $2AL_p$ центров параллелоэдров разбиения T. В частности напомню, что если $p \in \mathcal{P}_s$ есть нормальный вектор, то вектор $c_p = 2Ap$ называется *фасетным*.

Параллелоэдр P, кроме описания (2), имеет также следующее описание

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a^*(x) \le a^*(x - q) \text{ для всех } q \in 2AL_p\},$$

где $a^*(q) = \frac{1}{2}\langle q, A^{-1}q\rangle$. Действительно, $a^*(x - q) = a^*(x) - 2\frac{1}{2}\langle x, A^{-1}q\rangle + a^*(q)$. Положим $q = 2Ap$. Тогда неравенство $a^*(x) \le a^*(x - q)$ примет вид $\langle x, A^{-1}2Ap\rangle \le \frac{1}{2}\langle 2Ap, A^{-1}2Ap\rangle$, т.е. $\langle p, x\rangle \le a(p)$. Поэтому параллелоэдр P является ячейкой Дирихле-Вороного с метрической формой $a^*(x)$.

Замечу, что положительно определенная матрица A может быть представлена в виде $A = B^TB$, где B есть невырожденная матрица. При таком представлении векторы решетки центров параллелоэдров разбиения T и соответствующая квадратичная форма принимают вид $2Ap = B^Tt$ и $a(p) = \frac{1}{4}t^2$, где $t = 2Bp$. Рассмотрим преобразование пространства $x \to y = (B^T)^{-1}x$. Тогда $\langle p, x\rangle \to \frac{1}{2}\langle t, y\rangle$, и параллелоэдр P преобразуется в следующую *классическую ячейку Дирихле-Вороного* для обычной эвклидовой нормы x^2

$$(B^T)^{-1}P = P(L) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle t, y\rangle \le \frac{1}{2}t^2 \text{ для всех } t \in L\}, \tag{4}$$

где $L = 2BL_p$ есть решетка центров ячеек Дирихле-Вороного соответствующего разбиения Вороного. Назовем классическую ячейку Дирихле-Вороного *ДВ-ячейкой*. Опорные гиперплоскости фасет ДВ-ячейки $P(L)$ суть гиперплоскости $\Pi(u) = H_u(\frac{1}{2}u^2)$, ортогональные векторам $u \in L$, которые суть векторы с минимальной нормой u^2 в своем классе четности. Гиперплоскость $H_u(\frac{1}{2}u^2)$ есть гиперплоскость $H_p(a)$, которая определена в (3), где положено $p = u$ и $a(p) = \frac{1}{2}u^2$.

Для любой невырожденной матрицы B преобразование $B^T y = x$ переводит ДВ-ячейку решетки L в параллелоэдр вида (2), определяемый квадратичной формой $a(p) = (Bp)^2 = \langle p, B^T Bp \rangle$ и решеткой $L_p = \frac{1}{2}B^{-1}L$.

Утверждение, что всякий параллелоэдр имеет линейное описание (2), является одной из форм знаменитой гипотезы Вороного. Поэтому я называю *параллелоэдром Вороного* параллелоэдр, имеющий линейное описание (2), где $a(p)$ есть положительная квадратичная форма и множество $\mathcal{P}_s$ нормальных векторов фасет целочисленно порождает решетку L_p. Напомню, что если параллелоэдр имеет канонические нормальные векторы, то он **есть** параллелоэдр Вороного.

Важно отметить, что при фиксированной решетке L и меняющейся квадратичной форме $a(p)$ неравенства (2) описывают семейство параллелоэдров, получающихся друг из друга параллельными сдвигами ограничивающих гиперплоскостей $H_p(a)$.

В описании же (4) семейства аффинных образов $P(L)$ параллелоэдров $P = P(a)$ из (2) квадратичная форма фиксирована, но меняется решетка L.

Существует взаимно однозначное соответствие между контактными гранями параллелоэдра Вороного (2) и *классами четности* решетки L, порожденной множеством $\mathcal{P}$. Класс четности есть подмножество таких векторов решетки L, что разность любых двух его векторов есть удвоенный вектор решетки L. Для n-мерной решетки L обозначим классы четности через $C_i \subset L$. Назовем класс четности $C_0 = 2L$ *нулевым.* Тогда существует $2^n - 1$ ненулевых классов четности. Для $1 \leq i \leq 2^n - 1$ пусть M_i есть множество минимальных векторов класса C_i, т.е. векторов q минимальной нормы $a(q)$. Класс четности называется *простым*, если он имеет с точностью до знака лишь один минимальный вектор. В противном случае класс четности называется *сложным.* Минимальные векторы класса четности C_i линейно порождают подпространство $\mathrm{lin} M_i$, размерность которого обозначим через n_i. Размерность соответствующей контактной грани равна $n - n_i$.

В заметке [16] Рышков ввел понятие *коренного* параллелоэдра. Коренной параллелоэдр – это такой параллелоэдр, который не может быть представлен в виде суммы Минковского других параллелоэдров. Его квадратичная форма – реберная, т.е. она лежит на крайнем луче некоторой области L-типа. В той же заметке [16] описано строение многогранника Вороного $P(D_n)$ корневой решетки D_n в качестве примера коренного параллелоэдра для всех $n \geq 4$.

Не зная заметки Рышкова [16], я в своих статьях на английском языке (см., например, [24], [21]) назвал коренной параллелоэдр *rigid*, что переводится *жесткий.* В статье [24] доказано, что многогранник Вороного $P(D_n^*)$ является коренным (rigid) для всех четных $n = 2m$. К сожалению, С.С.Рышков полагал, что $P(D_n^*)$ является коренным для всех n (см. [18]).

Термин "rigid"связан со следующим свойством коренных параллелоэдров. Правые части линейных неравенств в (2), описывающих фасеты коренного параллелоэдра, однозначно, с точностью до множителя, определяются типом этого параллелоэдра. Это значит, что любое изменение правых частей, кроме умножения на общий множитель, изменяет тип коренного параллелоэдра, превращая его в не коренной.

Типом многогранника я называю класс многогранников, имеющих изоморфные частично упорядоченные множества всех их граней. Я называю размерность области типа параллелоэдра $P(a)$ *степенью нежесткости* этого параллелоэдра.

Если жесткий (коренной) параллелоэдр является параллелоэдром Вороного $P(a)$ из (2), то квадратичная форма $a(p)$ лежит на крайнем луче разбиения конуса квадратичных форм на L-области, или области типа, и его степень нежесткости равна 1.

Следующая лемма 1, опубликованная в [36] и [37], помогает описать область типа параллелоэдра и найти степень его нежесткости. Полезность этой леммы продемонстрирована в последнем разделе этой работы (см. предложение 12).

Лемма 1 *Пусть n-мерный многогранник P задан в виде (2), где $\mathcal{P}$ есть множество нормальных векторов p фасет $F(p)$ многогранника $P = P(a)$, а $a(p)$ есть некоторая функция, заданная на $\mathcal{P}$. Тогда любая линейная зависимость между векторами $p \in \mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$ такая, что пересечение фасет $\cap_{p\in\mathcal{P}_0} F(p) \neq \emptyset$, влечет следующим образом аналогичную зависимость между значениями правых частей $a(p)$:*

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_0} \mu(p)p = 0 \Rightarrow \sum_{p\in\mathcal{P}_0} \mu(p)a(p) = 0.$$

Доказательство. Пусть $x \in \cap_{p\in\mathcal{P}_0} F(p)$. Тогда, беря скалярное произведение x и первого равенства, получаем $0 = \sum_{p\in\mathcal{P}_0} \mu(p)\langle p, x\rangle = \sum_{p\in\mathcal{P}_0} \mu(p)a(p)$. □

Замечу, что, если P является параллелоэдром Вороного, то второе равенство в лемме 1 дает зависимость между коэффициентами a_{ij} матрицы A формы $a(p) = \langle p, Ap\rangle$. В этом случае векторы $q = 2Ap$ суть фасетные векторы параллелоэдра P. Следовательно линейная зависимость между нормальными векторами эквивалентна линейной зависимости между фасетными векторами. Поэтому лемма 1 есть переформулировка утверждений из [20] (см. Proposition 4), [30] (см. Theorem 4, раздел 2.3) и [32] (см. раздел 3) о подобной зависимости между векторами ячейки Делоне. Эта ячейка соответствует минимальной по включению грани, содержащей пересечение $\cap_{p\in\mathcal{P}_0} F(p)$.

Напомню, что если параллелоэдр $P = P(a)$ имеет описание (2) и $M_k \subseteq \mathcal{P}$ есть множество контактных векторов класса четности C_k, то значение $a(p) = a_k$ квадратичной формы одинаково для всех $p \in M_k$. Обратно, пусть дан параллелоэдр P и известны множества его контактных векторов. Мы хотим найти соответствующую квадратичную форму a. Тогда каждое множество контактных векторов M_k определяет равенства $a(p) = \sum_{i,j} a_{ij}p_ip_j = a_k$ для всех $p \in M_k$. Эти равенства дают зависимости между коэффициентами a_{ij} формы $a(p)$. Подробности см в [19] и [20].

Очень часто, но не всегда, для коренного (жесткого) параллелоэдра система таких равенств, взятых для некоторого семейства множеств контактных векторов, однозначно определяет соответствующую квадратичную форму.

4 Сумма Минковского параллелоэдров

Пусть квадратичная форма $a(p)$ параллелоэдра $P(a)$, определенного в (2), принадлежит некоторой области типа Δ. Пусть a_i суть квадратичные формы, лежащие на крайних лучах области Δ. Тогда $a = \sum_i \lambda_i a_i$, где $\lambda_i \geq 0$. В [28] показано, что в этом случае

$P(a) = \sum_i \lambda_i P(a_i)$, где эта сумма есть сумма множеств по Минковскому. Довольно часто некоторые крайние лучи области типа натянуты на квадратичные формы ранга 1 вида $a_u(p) = \langle u, p\rangle^2$, где $u \in \mathbb{R}^n$ есть некоторый вектор.

В описании (2) параллелоэдра $P(a)$ предполагалось, что квадратичная форма $a(p) = \langle p, Ap\rangle$ положительно определена. Но это описание можно использовать и для положительно полуопределенных квадратичных форм следующим образом. Пусть $\ker A$ есть ядро матрицы Грама A и $\ker A \neq \emptyset$. Напомню, что $\mathcal{P}$ порождает решетку L_p. Тогда множество $\mathcal{P}$ в описании (2) должно удовлетворять условию

$$\dim(\mathcal{P} \cap \ker A) = \dim(L_p \cap \ker A) = \dim(\ker A),$$

где $\dim X$ есть размерность пространства, натянутого на множество векторов $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Напомню, что $\mathcal{P}$ есть симметричное множество, т.е. если $p \in \mathcal{P}$, то $-p \in \mathcal{P}$. Поэтому система неравенств $\langle p, x\rangle \leq a(p)$ для $p \in \mathcal{P} \cap \ker A$ превращается в систему равенств $\langle p, x\rangle = 0$ для всех $p \in \mathcal{P} \cap \ker A$. Отсюда вытекает, что параллелоэдр $P(a)$ лежит в пространстве, ортогональном пространству $\ker A$.

В случае $a(p) = a_u(p) = \langle u, p\rangle^2$ матрица Грама $A_u = u^T u$ имеет ранг 1 и $\ker A$ есть гиперплоскость $H_u(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x\rangle = 0\}$. Поэтому параллелоэдр $P(a_u)$ есть отрезок $z(u)$ прямой $l(u)$, натянутой на вектор u и симметричный относительно начала 0. Пересечение $L_p(0) = L_p \cap H_u(0)$ есть подрешетка размерности $n-1$ решетки L_p. Эта подрешетка порождает расслоение решетки L_p на слои $L_p(k)$, являющиеся параллельными сдвигами подрешетки $L_p(0)$. Пусть $L_p(1)$ есть слой, ближайший к $L_p(0)$ и такой, что $\langle p, u\rangle > 0$ для всех $p \in L_p(1)$. Очевидно, что число $\lambda_u = \langle u, p\rangle$ не зависит от $p \in L_p(1)$. Пусть $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cap L_p(1)$. Тогда параллелоэдр $P(a_u)$ принимает вид

$$P(a_u) = z(u) = \{x \in l(u) : -\langle p, u\rangle^2 \leq \langle p, x\rangle \leq \langle p, u\rangle^2 \text{ для всех } p \in \mathcal{P}_1\}.$$

Так как $\langle p, u\rangle = \lambda_u$ для $p \in \mathcal{P}_1$, то

$$z(u) = \{x \in L(u) : -\lambda_u^2 \leq \langle p, x\rangle \leq \lambda_u^2 \text{ для всех } p \in \mathcal{P}_1\}.$$

Пологая $x = \lambda u$, получаем

$$z(u) = \{x = \lambda u : -\lambda_u \leq \lambda \leq \lambda_u\}. \tag{5}$$

Простейшей суммой Минковского параллелоэдров является взвешенная сумма отрезков $\sum_{u\in U} b_u z(u) = Z_b(U)$ для некоторого множества U, где $b_u \geq 0$ суть *веса* отрезков. Эта сумма называется *зонотопом*. Хорошо известно, что зонотоп $Z_b(U) = \sum_{u\in U} b_u z(u)$ является параллелоэдром тогда и только тогда, когда множество U унимодулярно.

В [39] показано, что для унимодулярного множества U зонотоп $Z_b(U)$ имеет следующее описание линейными неравенствами:

$$Z_b(U) = P(a_U) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x\rangle \leq a_U(p) \text{ для всех } p \in U^*\},$$

где $a_U(p) = f_b(p) = \sum_{u\in U} b_u \langle p, u\rangle^2$ и

$$U^* = \{p \in \mathbb{R}^n : \langle p, u\rangle \in \{0, \pm 1\} \text{ для всех } u \in U\}.$$

Рассмотрим теперь сумму Минковского n-мерного параллелоэдра $P(a)$ с отрезком $z(u)$. В [40] доказана следующая теорема.

Теорема 1 *Пусть параллелоэдр $P = P(a)$ задан в виде (2), неразложим в прямую сумму и $\mathcal{P}_s \subseteq \mathcal{P}$ есть множество нормальных векторов всех фасет параллелоэдра P. Пусть*

$$\mathcal{P}_s^* = \{e \in \mathbb{R}^n : \langle e, p\rangle \in \{0, \pm 1\},\ p \in \mathcal{P}_s\}.$$

Пусть $u \in \mathbb{R}^n$ и $z(u)$ есть отрезок, определенный выше. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) $P(a) + z(u) = P(a + a_u)$, где $a_u(x) = \lambda\langle u, x\rangle^2$ есть форма ранга 1, т.е. $P(a) + z(u)$ есть параллелоэдр Вороного квадратичной формы $a + a_u$;

(2) $u = \lambda e$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, и некоторого $e \in \mathcal{P}_s^*$, $e \neq 0$.

5 Главная (первая) область квадратичных форм $\mathcal{F}(\mathbb{A}_n)$

Главная область положительно полуопределенных квадратичных форм является совершенной областью, соответствующей совершенной решетке A_n, порожденной корневой системой $\mathbb{A}_n$.

Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}$ и $\mathcal{E} = \{e_i : i \in N\}$ есть некоторый базис пространства $\mathbb{R}^n$. Корневая система $\mathbb{A}_n$ с точностью до знаков задается векторами e_i, $i \in N$, и их разностями $e_i - e_j$, где $1 \leq i < j \leq n$, т.е.

$$\mathbb{A}_n = \{\pm e_i : i \in N,\ \ \pm(e_i - e_j) : \{ij\} \subseteq N\}.$$

Если взять векторы e_i такими, что $e_i^2 = 2$ и $\langle e_i, e_j\rangle = 1$ для $i \neq j$, то это будет классическое представление системы корней $\mathbb{A}_n$.

Множество форм $f_b(x) = \sum_{r\in\mathbb{A}_n} b_r\langle r, x\rangle^2$, взятых для всевозможных весов $b_r \geq 0$, и есть главная область $\mathcal{F}(\mathbb{A}_n)$. Параллелоэдр $P_n(f_b)$ есть зонотоп $Z_b(\mathbb{A}_n)$ для любой формы $f_b \in \mathcal{F}(\mathbb{A}_n)$, т.е.

$$P_n(f_b) = \sum_{r\in\mathbb{A}_n} b_r z(r) = Z_b(\mathbb{A}_n),$$

где $b_r \geq 0$.

Так как корневая система $\mathbb{A}_n$ и любое ее подмножество унимодулярны, то зонотоп $P_n(f) = Z_b(\mathbb{A}_n)$ есть параллелоэдр. Согласно разделу 4, множество нормальных векторов параллелоэдра $Z_b(\mathbb{A}_n)$ есть $\mathbb{A}_n^*$.

Пусть $\mathcal{E}^* = \{e_i^* : i \in N\}$ есть базис, двойственный базису $\mathcal{E}$, т.е. $\langle e_i^*, e_j\rangle = \delta_{ij}$, где δ_{ij} есть символ Кронекера. Тогда нетрудно проверить, что

$$\mathbb{A}_n^* = \{\pm e^*(S) : S \subseteq N\},$$

где для подмножества $S \subseteq N$ положено $e^*(S) = \sum_{i\in S} e_i^*$. Поэтому параллелоэдры $P(f)$, соответствующие формам $f \in \mathcal{F}(\mathbb{A}_n)$, могут быть записаны в виде

$$P_n(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : -f(e^*(S)) \leq x(S) \leq f(e^*(S)) \text{ для всех } S \subseteq N\}, \tag{6}$$

где $x(S) = \sum_{i\in S} x_i$ и x_i есть i-ая координата точки x в базисе $\mathcal{E}$. Если форма f является внутренней точкой главной области, то параллелоэдр $P(f)$ примитивен, и, с точностью до знака, $2^n - 1$ ненулевых векторов $e(S)$ суть нормальные векторы всех его фасет. Когда форма f выходит на границу главной области, некоторые фасеты превращаются в *контактные* грани, а их нормальные векторы становятся контактными векторами этих граней.

Если $b_r = b_0 = 1$ для всех $r \in \mathbb{A}_n$, то форма $f_{b_0} = f_0$, где

$$f_0(p) = \sum_{i \in N} p_i^2 + \sum_{i<j} (p_i - p_j)^2 = n \sum_{i \in N} p_i^2 - 2 \sum_{i<j} p_i p_j, \tag{7}$$

лежит на центральном луче главной области $\mathcal{F}(\mathbb{A}_n)$. Эта форма и соответствующий ей параллелоэдр $P_n(f_0)$ подробно рассмотрены Вороным в §§102–104 мемуара [2].

Подставляя вместо p_i i-ую координату вектора $e^*(S)$, нетрудно вычислить, что в этом случае $f_0(e^*(S)) = s(n+1-s)$, где $s = |S|$ есть мощность множества S. Неравенства в (6) принимают вид неравенств, приведенных Вороным в §102 для описания $P_n(f_0)$ (с точностью до множителя 2 у Вороного и его обозначения $\lambda = |S|$). Затем Вороной показывает, что между вершинами параллелоэдра $P_n(f_0)$ и перестановками множества N есть взаимно однозначное соответствие. Тем самым Вороной впервые показал, что $P_n(f_0)$ есть пермутаэдр.

Отмечу, что взаимно однозначное соответствие между вершинами параллелоэдра $P_n(f)$ и перестановками множества N справедливо для всех $f \in \mathcal{F}(\mathbb{A}_n)$, являющихся внутренними точками главной области. Действительно, пусть $\{i_1, i_2, ..., i_n\} = N$ есть некоторая перестановка множества N. Пусть $S_k = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$, $1 \le k \le n$. Тогда точка x с координатами $x_k = f(e^*(S_k)) - f(e^*(S_{k-1}))$ есть вершина параллелоэдра $P_n(f)$.

Но, как показали Гарбер и Поярков в [27], $P_n(f)$ является пермутаэдром только, если $f = f_0$ (см. также [39]).

6 Область форм решетки A_n

Любая перестановка множества $N = \{k_i : 1 \le i \le n\}$ определяет подобласть квадратичных форм, соответствующих решеткам, эквивалентным корневой решетке A_n. Рассмотрим следующее подмножество из $n+1$ корней системы $\mathbb{A}_n$:

$$\mathcal{R}_n = \{e_{k_1}, e_{k_n}\} \cup \{e_{k_i} - e_{k_{i+1}} : 1 \le i \le n-1\}.$$

Между векторами этого множества имеется лишь одна линейная зависимость $e_{k_1} = \sum_{i=1}^{n-1} (e_{k_i} - e_{k_{i+1}}) + e_{k_n}$. Ниже, ради простоты обозначений, положим $k_i = i$.

Коническая оболочка форм $\langle r, x \rangle^2$ для всех $r \in \mathcal{R}_n$ и есть область $\mathcal{F}(\mathcal{R}_n)$ форм решетки A_n. Любая форма области $\mathcal{F}(\mathcal{R}_n)$ имеет вид

$$f_b(x) = \sum_{r \in \mathcal{R}_n} b_r \langle r, x \rangle^2.$$

Так как множество $\mathcal{R}_n$ унимодулярно, то область $\mathcal{F}(\mathcal{R}_n)$ симплициальна. Она является $(n+1)$-мерной гранью главной совершенной области $\mathcal{F}(\mathbb{A}_n)$. Форма $f_{b_0}(x)$ есть классическая форма решетки A_n (см. ниже). Так как параллелоэдры $P(f_b)$ имеют один и тот же тип для всех $f_b \in \mathcal{F}(\mathcal{R}n)$, то степень нежесткости параллелоэдра $P(f_{b_0})$ решетки A_n равна $n+1$ (см. Proposition 8 в [20]). В качестве $\mathcal{R}_n$ в статье [20] взято множество $\{e_i : i \in N\} \cup \{\sum_{i\in N} e_i\}$.

Если $b_r = b_0 > 0$ для всех $r \in \mathcal{R}_n$ и $b_r = 0$ для $r \notin \mathcal{R}_n$, то форма $f_{b_0}(x)$ лежит на центральном луче области $\mathcal{F}(\mathcal{R}_n)$. Пусть $k_i = i$ для всех $i \in N$. Тогда нетрудно проверить, что для $b_0 = 1$ эта форма имеет вид

$$f_A(x) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}. \tag{8}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

есть матрица Грама этой формы. Эта матрица приведена на стр.109 книги [11] (см. стр. 143 русского перевода) как одна из двух матриц Грама решетки A_n (см. первую матрицу в (53)).

Итак, параллелоэдр $P(f_A)$ представлен выражением (6), где $f = f_A$. Так как форма f_A лежит на границе главной области, то $P(f_A)$ имеет фасет менее, чем $2(2^n-1)$. Вычисляя значения $f_A(e^*(S))$, убеждаемся, что простыми классами четности являются классы векторов вида $e^*(S)$, где множество $S = S_{ij} = \{i+1, ..., j-1, j\}$ есть непрерывный отрезок последовательности $\{1, 2, ..., n\}$ и $0 \le i < j \le n$. Замечу, что множество $S_{i,i+1} = \{i+1\}$, где $0 \le i \le n-1$, состоит из одного элемента. Норма вектора $e^*(S_{i,j})$ есть $f_A(e^*(S_{ij})) = 2$. Нетрудно проверить, что число таких векторов равно числу пар (i,j), где $0 \le i < j \le n$. Это число есть $\frac{1}{2}n(n+1)$, и оно есть число корней системы корней $\mathbb{A}_n$, посчитанных с точностью до знака.

Этот результат не удивителен. Напомню, что $\mathbb{A}_n$ есть унимодулярное множество векторов. Хорошо известно, что выше описанное множество векторов $e^*(S_{ij})$ унимодулярно. Одним из доказательств этого является такое *правильное* сопоставление этим векторам множества дуг полного ориентированного графа на множестве вершин $N \cup \{0\}$, что сумма векторов, сопоставленных дугам произвольного ориентированного цикла, равна нулю. Подробности см., например, в [10] и [17].

Действительно, возьмем цепь из n дуг $(i, i+1)$, где $0 \le i \le n-1$, направленных из вершины i в вершину $i+1$. Сопоставим вектору e_i дугу $(i-1, i)$ для всех i, $1 \le i \le n$. Для каждой пары индексов $i, j \in N \cup \{0\}$, где $i < j$, сопоставим вектору $e^*(S_{ij})$ дугу $(i-1, j)$ с начальной вершиной $i-1$ и конечной вершиной j. В результате получим полный ориентированный граф. Нетрудно убедиться, что это сопоставление правильно.

Итак, мы получили еще одно представление системы корней $\mathbb{A}_n$, правда в метрике f_A. Напомню, что в разделе 5 было дано классическое представление этой системы корней.

Для этого представления сопоставление векторов и дуг описанного выше графа совсем простое: вектору $e_i - e_j$ сопоставляется дуга (i, j), где положено $e_0 = 0$.

Параллелоэдр $P_n(f_A)$, как и все параллелоэдры главной области, есть зонотоп, т.е.

$$P_n(f_A) = \sum_{r \in \mathcal{R}_n} b_r z(r).$$

Отмечу, что любое собственное подмножество корней множества $\mathcal{R}_n$ линейно независимо. А сумма отрезков, параллельных векторам линейно независимого множества, есть параллелепипед, стороны которого равны и параллельны суммируемым отрезкам. Отсюда вытекает, что собственные грани всех размерностей параллелоэдра $P_n(f_A)$ суть параллелепипеды, у которых все стороны имеют одинаковую длину, если $b_r = b_0$ для всех $r \in \mathcal{R}_n$. В частности, в размерности 3 параллелоэдр $P_3(f_A)$ есть *ромбический додекаэдр*. М. Штогрин (см. [8]) назывет его более правильно *параллелограмматическим* додекаэдром. Эпитет *параллелограмматический* говорит, что все его двумерные грани суть параллелограммы.

7 Вторая совершенная область $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$

Вторая совершенная область существует для всех $n \geq 2$. Для $n \leq 3$ она совпадает с главной областью. Для $n \geq 4$ она определяется совершенной решеткой D_n. Корневую решетку D_n удобно определять в ортонормальном самодвойственном базисе $\{e_i : i \in N\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, где $N = \{1, 2, ..., n\}$. Векторы решетки D_n в этом базисе суть векторы $\sum_{i \in N} z_i e_i$, где z_i суть целые числа такие, что $\sum_{i \in N} z_i \equiv 0$ по модулю 2, т.е. эта сумма четна. Множество M минимальных векторов решетки D_n является системой корней $\mathbb{D}_n$, которая состоит с точностью до знака из $n(n-1)$ корней $r = e_i \pm e_j$, где $i, j \in N$ и $i \neq j$. Таким образом крайние лучи совершенной области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$ натянуты на $n(n-1)$ форм $(x_i \pm x_j)^2$ ранга 1. Поэтому произвольная форма f из второй совершенной области (для $n = 5$ эта область, следуя мемуару Вороного [2], обозначена в [9] через R_1) имеет вид

$$f(x) = \sum_{r \in \mathbf{D}_n} b_r \langle r, x \rangle^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_{ij^+}(x_i + x_j)^2 + b_{ij^-}(x_i - x_j)^2), \tag{9}$$

где $b_r = b_{ij^\pm}$ для $r = e_i \pm e_j$, соответственно. Коэффициенты a_{ij} формы $f(x) = \sum a_{ij} x_i x_j$ выражаются через веса $b_{ij^\pm}$ следующим образом.

$$a_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} (b_{ij^-} + b_{ij^+}), \ 1 \leq i \leq n, \ a_{ij} = b_{ij^+} - b_{ij^-}, \ 1 \leq i < j \leq n. \tag{10}$$

Напомним, что единственными формами ранга 1, содержащимися во второй совершенной области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$, являются формы, пропорциональные формам $(x_i - x_j)^2$ и $(x_i + x_j)^2$, $i, j \in N$. Поэтому крайние лучи ранга 1 любой L-области, содержащейся в $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$, находятся среди этих форм.

Итак каждая форма второй совершенной области однозначно (но не взаимно однозначно) определяется множеством $\{b_r : r \in \mathbb{D}_n\}$, состоящим из $n(n-1)$ неотрицательных весов $b_r \geq 0$.

Квадратичная форма $f(x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ определяется $\frac{1}{2}n(n+1)$ параметрами a_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq n$. Так как число весов b_r, $r \in \mathbb{D}_n$, равно $n(n-1)$, что для $n \geq 4$ больше, чем $\frac{1}{2}n(n+1)$, то одну и ту же форму $f \in \mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$ определяют некоторые разные функции весов $b : \mathbb{D}_n \to \mathbb{R}_+$. Поэтому иногда полезно использовать описываемую ниже запись формы $f(x)$ с использованием не более чем $\frac{1}{2}n(n+1)$ весов.

Пусть $f(x) = \sum_{r\in\mathbf{D}_n} b'_r\langle r, x\rangle^2$. Положим

$$b^0_{ij} = \min(b'_{ij^+}, b'_{ij^-}). \tag{11}$$

Это значение для b^0_{ij} будет использоваться ниже несколько раз. Пусть $b_{ij^\pm} = b'_{ij^\pm} - b^0_{ij}$. Тогда для каждой пары индексов ij один из двух весов $b_{ij^\pm}$ равен нулю. Пусть

$$U_f = \{r \in \mathbb{D}_n : b_r > 0\}.$$

Тогда $|U_f| \leq \frac{n(n-1)}{2}$ и форма $f(x)$ может быть однозначно записана в следующем виде:

$$f(x) = 2\sum_{(ij)} b^0_{ij}(x_i^2 + x_j^2) + \sum_{r\in U_f} b_r\langle r, x\rangle^2 = \sum_{i\in N}\gamma_i x_i^2 + \sum_{r\in U_f} b_r\langle r, x\rangle^2 = f_\gamma(x) + f_{U_f}(x), \tag{12}$$

где

$$\gamma_i = 2\sum_{j\in N-\{i\}} b^0_{ij},\ f_\gamma(x) = \sum_{i\in N}\gamma_i x_i^2,\ \text{и}\ f_{U_f}(x) = \sum_{r\in U_f} b_r\langle r, x\rangle^2.$$

Запись (12) содержит не боле чем n параметров $\gamma_i \geq 0$, $i \in N$, и не более чем $\frac{1}{2}n(n-1)$ весов $b_r \geq 0$, $r \in U_f$, так как $|U_f| \leq \frac{1}{2}n(n-1)$. Эти веса однозначно определяются по любой квадратичной форме $f \in \mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$.

Для демонстрации не единственности представления (12) покажем, что форма $f_\gamma(x) = \sum_{i\in N}\gamma_i x_i^2$ в представлении (12) может быть получена несколькими функциями весов b. Простейшее представление дается весами $b'_{ij^+} = b'_{ij^-} \equiv b^0_{ij}$, где $1 \leq i < j \leq n$. В этом случае $U_f = \emptyset$, и выражение (12) принимает вид $f(x) = f_\gamma(x)$.

Другое представление дается перестановкой $\pi(N) = \{\pi(i) : i \in N\}$ множества N. Пусть $b_{\pi(i)\pi(i+1)^+} = b_{\pi(i)\pi(i+1)^-} = b^0_{\pi(i)\pi(i+1)} > 0$, где $1 \leq i \leq n$, $n+1 \equiv 1$, и $b_{ij^\pm} = 0$, если ij не является парой соседних элементов множества N в перестановке π. В этом случае $\gamma_{\pi(i)} = b^0_{\pi(i-1),\pi(i)} + b^0_{\pi(i)\pi(i+1)}$.

В случае, если $n = 2m$ четно, то есть еще один способ представления формы f_γ. Пусть $N = \cup_{1\leq k\leq m}\{i_kj_k\}$ есть разбиение множества N на m непересекающихся пар. Пусть $b_{i_kj_k^+} = b_{i_kj_k^-} = b_k > 0$ и $b_{ij^+} = b_{ij^-} = 0$, если нет такого k, что $ij = i_kj_k$. В этом случае $\gamma_{i_k} = \gamma_{j_k} = b_k$, $1 \leq k \leq m$.

Другой важный случай дают веса $\gamma_i = 0$ для всех $i \in N$, т.е. $b^0_{ij} = \min(b_{ij^+}, b_{ij^-}) = 0$ для всех пар ij. В этом случае форма $f(x) = \sum_{r\in U_f}\langle r, x\rangle^2 = f_{U_f}(x)$ лежит на грани совершенной области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$, которая в работе [9] обозначена F_ν, где $1 \leq \nu \leq n2^{n-1}$.

Вероятно, хотя я не знаю доказательства этого факта, вторая совершенная область разбивается на области L-типов так, что каждая L-область целиком лежит в $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$. Это так для размерностей $n \le 6$.

Каждая L-область Δ есть многогранный конус. Поэтому формы $f \in \Delta$ представимы в виде выпуклой комбинации $f = \sum_i \beta_i f_i$, где $\beta_i \ge 0$ и формы f_i лежат на крайних лучах области Δ. Конечно, каждая форма f_i представима в виде суммы $f_i = \sum_{r \in U_i} b_r f_r$, где $U_i \subset \mathbb{D}_n$. При этом параллелоэдры $P(f_i)$ являются коренными параллелоэдрами.

Квадратичные формы f_γ и f_{U_f} в (12) определяют параллелоэдры $P(f_\gamma)$ и $P(f_{U_f})$ в соответствии с определением (2) для некоторого множества $\mathcal{P}$. Но выражение (12) не описывает сумму $P(f_\gamma) + P(f_{U_f})$, которая в общем случае не является параллелоэдром $P(f_\gamma + f_{U_f})$. Иными словами, разложение $f = f_\gamma + f_{U_f}$ не всегда отображает разложение параллелоэдра $P(f)$ в сумму $P(f_\gamma) + P(f_{U_f})$.

По определению, всякий параллелоэдр второй совершенной области есть параллелоэдр $P(f)$, где $f \in \mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$, $\mathcal{P} = D_n^*$, $P(f)$ есть $P(a)$, определенный в (2) и $a = f$. Если $f = f_\gamma + f_U$, где $U \subset \mathbb{D}_n$ есть унимодулярное множество, то иногда удается доказать, что $P(f_\gamma + f_U) = P(f_\gamma) + P(f_U)$, где $P(f_U) = Z_b(U)$ есть зонотоп, определенный в разделе 4.

В этой работе будут рассмотрены несколько примеров такого разложения.

8 Грани второй совершенной области

Первая совершенная область граничит фасетами только с совершенными областями, эквивалентными второй совершенной области. Каждая такая фасета симплициальна, т.е. она есть выпуклая оболочка $\sum_{r \in U} b_r f_r(x) = \sum_{r \in U} b_r \langle r, x \rangle^2$, где U есть унимодулярное множество, изоморфное следующему множеству U_n^k для некоторого $k \in N$

$$U_k^n = \mathbb{A}_{n-1} \cup \{e_k + e_j, j \in N - \{k\}\}, \text{ где } \mathbb{A}_{n-1} = \{e_i - e_j, i, j \in N\}. \tag{13}$$

Множество U_n^k есть унимодулярное множество корней изоморфное $\mathbb{A}_n - \{r_0\}$. Этот тип фасет обозначен в [9] через H_ν.

Любое подмножество $X \subseteq \mathbb{D}_n$ удобно обозначать двухцветным графом $G(X)$ на n вершинах $i \in N$, ребра которого суть такие пары (ij), что $b_{ij} > 0$. Ребро (ij), соответствующее корню $r \in X$, окрашено в черный цвет, если $r = e_i + e_j$, и в красный цвет, если $r = e_i - e_j$. Они обозначаются сплошным или пунктирным отрезком, соединяющим концевые вершины ребра, соответственно (см., например, [9], [12], [14]).

Для грани F второй совершенной области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$ обозначим через $R(F) \subset \mathbb{D}_n$ множество всех таких корней $r \in \mathbb{D}_n$, что $b_r > 0$ для форм $f_b \in F$, являющихся внутренними точками грани F. Тогда для грани $F = H_\nu$ имеем $R(H_\nu) = U_n^k$ и граф $G(U_k^n)$ есть полный граф K_n, в котором вершине $k \in N$ инцидентно $n-1$ ребер обоих цветов, а остальные ребра красные.

В [9] описано два типа фасет, которые отметил еще Вороной в [1]. Фасеты одного типа, обозначенного в [9] через F_ν, определяются индексом $k \in N$ и функцией весов b_r такой, что $b_{ik}^0 = 0$ для всех $i \in N - \{k\}$, где $b_{ij}^0 = \min(b_{ij^+}, b_{ij^-})$. Граф $G(R(F_\nu))$ есть двухцветный полный граф K_n, где вершина $k \in N$ соединена с остальными вершинами одноцветными ребрами, а ребра (ij), где $i, j \neq k$, имеют оба цвета.

Фасеты другого типа D_ν определяются функцией весов такой, что $b^0_{ij} = 0$, где $i, j \in N-\{k\}$. Граф $G(R(D_\nu))$ есть двухцветный полный граф K_n, где вершина $k \in N$ соединена с остальными вершинами двухцветными ребрами, а ребра (ij), где $i, j \neq k$, имеют один цвет, либо черный, либо красный.

Фасеты описанного выше типа H_ν являются специальными случаями фасет типа D_ν. Для них $b^0_{ij} = 0$ определяются графом $G(U)$ на множестве вершин $N - \{k\}$ и подмножеством вершин $S \subseteq N - \{k\}$ следующим образом: $b^0_{ij} = b_{ij^+} = 0$, если $i, j \in S$ или $i, j \notin S$, и $b^0_{ij} = b_{ij^-} = 0$, если $i \in S$, $j \notin S$ или $i \notin S$, $j \in S$. Таким образом, ребро (ij), где $i, j \neq k$, имеет красный цвет, если оно не принадлежит разрезу $(S, N - \{k\} - S)$, и имеет черный цвет в противном случае. Так как множества $S \subseteq N - \{k\}$ и $N - \{k\} - S$ определяют один и тот же разрез, и любую вершину графа K_n можно взять в качестве k, то число фасет типа H_ν равно $n2^{n-2}$.

Число фасет типа D_ν равно $n2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

A.Loesch в диссертации [12] называет фасеты типа F_ν и D_ν *большими* и *малыми*, соответственно. Он доказывает теорему о том, что для любого унимодулярного подмножества $U \subseteq \mathbb{D}_n$ множество $\mathcal{F}(U) = \{f_b : f_b = \sum_{r \in U} b_r \langle r, x\rangle^2\}$ есть грань области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$ размерности $s \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1$.

Действительно, согласно предложению 6 из раздела 14, если для унимодулярного множества $U \subseteq \mathbb{D}_n$ граф $G(U)$ содержит двухцветные ребра, то эти ребра образуют какой-то один из двух следующих графов: *звезда* или *треугольник*. Если $G(U)$ содержит звезду, то $\mathcal{F}(U)$ принадлежит малой грани типа D_ν или H_ν, которые симплициальны. Если $G(U)$ содержит треугольник, то $\mathcal{F}(U)$ принадлежит пересечению больших граней типа F_ν, у которых определяющая вершина k не принадлежит треугольнику.

Таким образом, если $U = U^k_n$, то $\mathcal{F}(U)$ есть фасета типа H_ν. Если $U = U(Q_k)$ есть кографическое множество, определенное в разделе 14, то $\mathcal{F}(U)$ содержится в фасете типа D_ν.

В статье [35] доказан общий результат о том, что для любой совершенной области $\mathcal{F}(M)$ и любого унимодулярного подмножества $U \subseteq M$ множество форм $\mathcal{F}(U)$ является гранью совершенной области $\mathcal{F}(M)$.

9 Двойственная решетка D^*_n

Центральный луч второй совершенной области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$ задается равными друг другу весами b_r. На этом луче лежит форма двойственной решетки D^*_n. Поэтому форма решетки D^*_n есть форма (9), где положено $b_r = b_0$ для всех $r \in \mathbb{D}_n$. Это есть форма

$$f_0(x) = 2(n-1)b_0 \sum_{i \in N} x^2_i, \tag{14}$$

определяющая стандартную евклидову метрику и ДВ-ячейку $P(D^*_n)$.

Двойственная решетка D_n^* есть центрировка решетки $\mathbb{Z}^n$ вектором $\frac{1}{2}e(N)$, где $e(N) = \sum_{i\in N} e_i$. Ее форма (14) соответствует ортонормированному базису $\{e_i : i \in N\}$. В этом базисе векторы D_n^* имеют вид $a + \frac{1}{2}\alpha e(N)$, где $a \in \mathbb{Z}^n$ и $\alpha \in \{0, 1\}$. Таким образом в этом базисе координаты любого вектора решетки D_n^* либо все целые, либо все полуцелые.

Для дальнейшего важно знать минимальные относительно формы f_0 векторы классов четности решетки D_n^*. Я даю не только минимальные относительно f_0 векторы, но и векторы, которые могут быть минимальными для других квадратичных форм совершенной области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$.

Форма f_0 определяет $n+2^{n-1}$ простых классов четности. Множество их минимальных векторов есть

$$\mathcal{P}_0(n) = \{\pm e_i, \text{ для всех } i \in N;\} \cup \{q(S) = \frac{1}{2}(e(S) - e(\overline{S})) \text{ для всех } S \subseteq N\}, \tag{15}$$

где $\overline{S} = N - S$ для любого подмножества $S \subseteq N$. Очевидно, что $q(S) = e(S) - \frac{1}{2}e(N)$ и $q(\overline{S}) = -q(S)$. В [9] показано, что минимальные относительно f_0 векторы e_i для всех $i \in N$ и $q(S)$ для всех $S \subseteq N$ остаются минимальными векторами простых классов четности для всех форм, являющихся *внутренними* точками второй совершенной области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$, при всех $n \geq 4$.

Остальные ненулевые классы четности, которые я обозначаю через $C(T)$, в числе $2^{n-1} - (n+1)$ определяются подмножествами $T \subseteq N$. Векторы класса $C(T)$ определяются всеми подмножествами S множества T. Они суть следующие векторы

$$p(S, T) = 2e(S) - e(T) = e(S) - e(T - S), \text{ где } \emptyset \subseteq S \subseteq T \subset N, \text{ и } 2 \leq |T| \leq n - 2.$$

Замечу, что $p(S, T) = -p(T - S, T)$ и $p(T, T) = e(T)$. В частности, если $|T| = 1$, т.е. если $T = \{i\}$, то $p(\emptyset, \{i\}) = -e_i$, $p(\{i\}, \{i\}) = e_i$. Так как векторы $e(N)$ и $2e_i$ для всех $i \in N$ принадлежат удвоенной решетке $2D_n^*$, то два вектора $p(S, T)$ и $p(S', T')$ принадлежат одному классу четности, если либо $T' = T$, либо $T' = N - T$. При этом $T \neq N$ поскольку, если $T = N$, то $p(S, N) = 2q(S)$. Если же $T = N - \{i\}$, то вектор $p(S, N - \{i\}) = 2e(S) - e(N) + e_i$ принадлежит классу четности вектора e_i. Так как множество всех упомянутых выше векторов важно для дальнейшего, обозначим его через $\mathcal{P}_D(n)$. Итак,

$$\mathcal{P}_D(n) = \{q(S), S \subseteq N;\ p(S, T),\ S \subseteq T \subset N,\ 1 \leq |T| \leq n - 2.\} \tag{16}$$

Контактные векторы сложных классов четности решетки D_n^* суть векторы $p(S, T)$, где $S \subseteq T \subset N$ и $2 \leq |T| \leq \frac{1}{2}n$. Действительно, если $|T| > \frac{1}{2}n$, то вектор $p(S, T)$ принадлежит классу четности векторов $p(S', N - T)$, $S' \subseteq N - T$, и для его нормы справедливо неравенство $f_0(p(S, T)) = 2(n - 1)b_0|T| > 2(n - 1)b_0|N - T| = f_0(p(S', N - T))$.

Когда форма f сдвигается внутри второй совершенной области от точки f_0, определенной в (14), множество минимальных векторов и тип параллелоэдра Вороного $P(f)$ могут меняться.

Для дальнейшего нужно знать некоторые свойства векторов множества $\mathcal{P}_D(n)$.

Справедливость утверждения следующей леммы проверяется прямой проверкой.

Лемма 2 *Так как* $q(S) = e(S) - \frac{1}{2}e(N)$ *и* $p(S,T) = 2e(S) - e(T)$, *то существуют следующие соотношения между векторами множества* $\mathcal{P}_D(n)$:

$$q(S) + q(T) = q(S \cap T) + q(S \cup T) = \sum_{i \in S \cap T} e_i - \sum_{i \in N-(S \cup T)} e_i.$$

$$q(S) + q(T) = p(S \cap T, N - S \cup T),\ q(S) - q(T) = p(S - S \cap T, T - S \cap T).$$

$$q(S) + e_i = q(S \cup \{i\}) \text{ для } i \notin S.$$

$$q(S) + p(X,Y) = q((S - Y) \cup X), \text{ где } X \cap S = \emptyset, Y \subseteq S.$$

$$p(S,T) + p(X,Y) = p((S - S \cap Y) \cup (X - T \cap X)), (T - T \cap X) \cup (Y - S \cap Y)),$$

где $S \cap X = \emptyset$, *и* $T \cap Y = \emptyset$.

10 Многогранники $P_n(\gamma)$

Очевидно, что множество векторов $\mathcal{P}_0(n)$ порождает решетку D_n^*. Для этого достаточно взять базис, состоящий из любых $n-1$ векторов базиса $\{e_i : i \in N\}$ и вектора $q(N) = \frac{1}{2}e(N)$.

Линейное описание параллелоэдров второй совершенной области дается выражением (2) с квадратичной формой f из (9) и $\mathcal{P} = D_n^*$. Я предполагаю, что вместо D_n^* достаточно взять множество $\mathcal{P}_D(n)$, т.е. многогранники Вороного второй совершенной области имеют вид

$$P(f_b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x\rangle \le \sum_{r \in \mathbb{D}_n} b_r \langle r, p\rangle^2 \text{ для } p \in \mathcal{P}_D(n)\}.$$

Это предположение означает, что нормальные векторы *примитивных* параллелоэдров второй совершенной области принадлежат множеству $\mathcal{P}_D(n)$. Иными словами, на каждом классе четности $C(T)$ минимумы квадратичной формы $f_b(p) = \sum_{r \in \mathbb{D}_n} b_r \langle r, p\rangle^2$ достигаются на векторах множества $\{p(S,T) : S \subseteq T\} \cup \{p(S', N - T : S' \subseteq N - T\}$.

Особый интерес имеют многогранники $P(f_b)$, когда $f_b(p) = f_\gamma(p) = \sum_{i \in N} \gamma_i p_i^2$. Формы $f_\gamma(p)$, в частности, суть формы $f_b(p)$, где $b_{ij^+} = b_{ij^-}$ (см. (10)). Многогранник $P(f_b)$ имеет следующее описание

$$P(f_\gamma) = P_n(\gamma) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} p_i x_i \le \sum_{i \in N} \gamma_i p_i^2, \text{ для всех } p \in \mathcal{P}_D(n)\}, \qquad (17)$$

где $\gamma = \{\gamma_i \ge 0 : i \in N\}$ есть неотрицательный вектор параметров, т.е. $\gamma \in \mathbb{R}^n_+$.

Легко проверить, что простыми классами четности минимальных векторов формы $f_\gamma = \sum_{i \in N} \gamma_i p_i^2$ являются только классы, содержащие векторы $\pm e_i$, $i \in N$, и $q(S)$, $S \subseteq N$. Действительно, величина $f_\gamma(p(S,T))$ принимает одинаковое значение $\gamma(T) = \sum_{i \in T} \gamma_i$ для всех подмножеств $S \subseteq T$. Система неравенств, определяющих многогранники $P(f_\gamma)$, в этом случае имеет вид

$$-\gamma_i \le x_i \le \gamma_i,\ i \in N, \qquad (18)$$

$$x(S) - x(N-S) \le \frac{1}{2}\gamma(N),\ S \subseteq N, \tag{19}$$

$$x(S) - x(T-S) \le \gamma(T),\ S \subseteq T \subset N,\ T \ne \emptyset. \tag{20}$$

Обращаю внимание на то, что заменяя в неравенстве (19) множество S на $N-S$, получим неравенства $x(S) - x(N-S) \ge -\frac{1}{2}\gamma(N)$.

Покажем, что неравенства (20) в третьей строчке этой системы следуют из неравенств первой строки. Суммируя неравенства первой строки по $i \in S$ и $i \in T-S$, получим следующие неравенства $x(S) \le \gamma(S)$ и $-\gamma(T-S) \le x(T-S)$. Так как второе неравенство эквивалентно неравенству $-x(T-S) \le \gamma(T-S)$, то сумма этих неравенств и есть неравенство (20). Замечу, что этого следовало ожидать, так как вектор $p(S,T)$, соответствующий неравенству (20), принадлежит сложному классу четности, т.е. не определяет фасету.

Множество нормальных векторов, соответствующих неравенствам (18) и (19), есть множество $\mathcal{P}_0(n) \subseteq \mathcal{P}_D(n)$, приведенное в (15).

Найдем теперь квадратичную форму $f(p)$, заданную на множестве векторов $\mathcal{P}_D(n)$, определенном в (16), и принимающей значения $f(\pm e_i) = \gamma_i$. Нетрудно видеть, что если $f(p) = \sum_{i\in N} \gamma_i p_i^2$, то $f(p(S,T)) = \sum_{i\in T} \gamma_i = \gamma(T)$ не зависит от $S \subseteq T$. Обратно, имеем следующее утверждение.

Лемма 3 *Любая квадратичная форма $f(p) = \langle p, Ap\rangle$, заданная на множестве $\mathcal{P}_D(n)$, принимающая значения $f(e_i) = \gamma_i$ для $i \in N$ и такая, что значение $f(p(S,T))$ не зависит от S, где $|T| = 2$, имеет вид*

$$f(p) = f_\gamma(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in N} \gamma_i p_i^2,$$

где p_i для всех $i \in N$ суть координаты вектора p в базисе $\{e_i : i \in N\}$. В этом случае $f(p(S,T))$ не зависит от S для любых множеств T мощности $|T| \ge 2$.

Доказательство. Пусть a_{ij} суть элементы матрицы A. Так как $f(e_i) = \langle e_i, Ae_i\rangle = a_{ii}$, то для $p = e_i$ имеем $\gamma_i = f(e_i) = a_{ii}$. Мы получили значения диагональных элементов матрицы A.

Рассмотрим множество T мощности $|T| = 2$. Тогда, с точностью до знака, векторы $p(S,T)$ суть векторы $e_i \pm e_j$. Поэтому $f(p(S,T)) = f(e_i \pm e_j) = \langle e_i \pm e_j, A(e_i \pm e_j)\rangle = a_{ii} \pm 2a_{ij} + a_{jj}$ и эти значения одинаковы для обоих векторов $e_i - e_j$ и $e_i + e_j$. Поэтому $a_{ij} = 0$ и это равенство справедливо для всех пар $i, j \in N$. Поэтому матрица диагональна с диагональными элементами $a_{ii} = \gamma_i$, т.е. $f(p) = \langle p, Ap\rangle = \sum_{i\in N} \gamma_i p_i^2 = f_\gamma(p)$. Поэтому $f(p(S,T)) = \sum_{i\in T} \gamma_i p_i^2$ не зависит от S для любых T. Получили утверждение леммы. $\square$

Следует заметить, что многогранник $P_n(\gamma)$ является параллелоэдром для всех векторов $\gamma \ge 0$. Но не для всех γ параллелоэдр $P(\gamma)$ принадлежит второй совершенной области $\mathcal{D}(D_n)$. Если $\gamma_i = 2\sum_{j\in N-\{i\}} b_{ij}^0$, то вектор γ не может иметь только одну ненулевую компоненту, поскольку параметр $b_{ij}^0 \ge 0$ дает вклад как в γ_i, так и в γ_j. В частности, если $n = 2$, то $\gamma_i = \gamma_j = 2b_{ij}^0$, и снова $f_\gamma \in \mathcal{F}(D_2)$ только, если $\gamma_i = \gamma_j$.

Неравенства (18) и (19) описывают следующие два многогранника, оба с центром в начале.

$$\mathbb{Q}_n(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n : -\gamma_i \le x_i \le \gamma_i,\ i \in N\} \text{ и } \mathbb{O}_n(a_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle q(S), x\rangle \le \frac{1}{2}a_0,\ S \subseteq N\},$$

где $a_0 = \frac{1}{2}\gamma(N)$.

Здесь $\mathbb{Q}_n(\gamma)$ есть прямоугольный параллелепипед с длинами сторон $2\gamma_i$. Вершины $\mathbb{Q}_n(\gamma)$ суть точки $v(S) = \sum_{i\in S}\gamma_i e_i - \sum_{j\in N-S}\gamma_j e_j$. Неравенства $\langle p(S,T), x\rangle \le \gamma(T)$, т.е. неравенства (20), суть контактные неравенства семейства параллельных граней параллелепипеда $\mathbb{Q}_n(\gamma)$. Замечу, что для $T = \{i\}$ они суть неравенства (18). Многогранник $\mathbb{O}_n(a_0)$ по определению есть *ортаэдр* с вершинами в точках $\pm a_0 e_i$.

Очевидно, что $P_n(\gamma)$ есть пересечение этих многогранников, т.е., что

$$P_n(\gamma) = \mathbb{Q}_n(\gamma) \cap \mathbb{O}_n(a_0).$$

В частности, для $n = 1, 2, 3$ имеем следующие многогранники.

Параллелоэдр $P_1(\gamma)$ есть отрезок $\mathbb{O}_1(\frac{\gamma}{2}) = \{x_1 : -\frac{\gamma}{2} \le x_1 \le \frac{\gamma}{2}\}$, содержащийся в $\mathbb{Q}_1(\gamma) = \{x_1 : -\gamma \le x_1 \le \gamma$.

Параллелоэдр $P_2(\gamma)$ есть либо шестиугольник, являющийся пересечением прямоугольника $\mathbb{Q}_2(\gamma)$ и ромба $\mathbb{O}_2(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2})$, если $\gamma_1 \ne \gamma_2$, либо квадрат $\mathbb{O}_2(a_0) \subset \mathbb{Q}_2(\gamma)$, если $\gamma_1 = \gamma_2$ и тогда $a_0 = \gamma_1 = \gamma_2$.

Параллелоэдр $P_3(\gamma)$ есть усеченный октаэдр в случае, когда $0 < \gamma_i < a_0$ для всех $i \in N_3$, и тогда он есть примитивный 3-мерный параллелоэдр. Если $\gamma_i = a_0$ и $0 < \gamma_j, \gamma_k < a_0$, где $\{ijk\} = N_3$, то $P_3(\gamma)$ есть ромбический додекаэдр, который есть куб $\mathbb{Q}_3(\gamma)$, над каждой стороной которого поднята пирамида.

В случае, когда $\gamma_i = \beta$ для всех $i \in N$, имеем равенства $P_n(\beta) = 2\beta P(D_n^*)$, где $P(D_n^*)$ есть ДВ-ячейка решетки D_n^*. В частности, для $n = 3$ параллелоэдр $P(D_3^*)$ примитивен.

Обозначим через $\pm F_i$ фасеты многогранника $P_n(\gamma)$, определяемые нормальными векторами $\pm e_i$. Если $\gamma_i < \frac{1}{2}\gamma(N)$, то фасета F_i отрезает вершину $\frac{1}{2}\gamma(N)e_i$ ортаэдра $\mathbb{O}_n(\gamma)$. Через $F(S)$ обозначим фасету $P_n(\gamma)$ с нормальным вектором $q(S) = e(S) - \frac{1}{2}e(N)$. Так как $\langle v(S), q(S)\rangle = \frac{1}{2}\gamma(N) = a_0 > \frac{1}{2}a_0$, то фасета $F(S)$ отрезает вершину $v(S)$ параллелепипеда $\mathbb{Q}_n(\gamma)$.

Рассмотрим преобразование $\chi_S : x \to x_S$, где $x = \sum_{i\in N} x_i e_i$ и $x_S = \sum_{i\in S} x_i e_i - \sum_{i\in N-S} x_i e_i$. Это преобразование является автоморфизмом многогранника $P_n(\gamma)$. Действительно, для $x \in P_n(\gamma)$ точка x_S удовлетворяет все неравенства (18). Нетрудно убедиться, что для $T \subseteq N$ выполнено равенство $\langle q(T), x_S\rangle = \langle q(T'), x\rangle$, где $T' = N - (S\Delta T)$ и $S\Delta T = (S - S\cap T) \cup (T - S\cap T)$. Отсюда вытекает, что $x_S \in P_n(\gamma)$.

Преобразование χ_S переводит фасеты $\pm F(S)$ в фасеты $\pm F(N)$, где знаки согласованы. Действительно, пусть $x \in F(S)$, т.е. $x(S) - x(N-S) = \frac{1}{2}\gamma(N)$. Следовательно, $x(S) + (-x(N-S)) = x_S(S) + x_S(N-S) = x_S(N) = \frac{1}{2}\gamma(N)$, т.е. $x_S \in F(N)$. Таким образом, все фасеты типа $F(S)$ эквивалентны между собой и конгруэнтны друг другу. Поэтому мы изучим вершины фасеты $F(N)$.

Лемма 4 *Если $x \in F(N)$, то $x_i \ge 0$ для всех $i \in N$. Если $x \in F(S)$, то $x_i \ge 0$ для $i \in S$ и $x_i \le 0$ для $i \in N - S$.*

Доказательство. Пусть $x \in F(N)$, т.е. $x(N) = \frac{1}{2}\gamma(N)$. Предположим, что $x_i < 0$ для $i \in T$, но $x_i \geq 0$ для $i \in N - T$. Для $S = N - T$ левая часть неравенства (19) принимает вид $x(N - T) - x(T) = x(N - T) + x(T) - 2x(T) = \frac{1}{2}\gamma(N) - 2x(T)$. Так как $x(T) < 0$, то это показывает, что неравенство (19) при $S = N - T$ не выполняется. Поэтому $x \notin P_n(\gamma)$. Получили противоречие, которое показывает, что $x_i \geq 0$ для всех $i \in N$. Утверждение для $x \in F(S)$ следует из того, что $\chi_S(x) = x_S \in F(N)$. $\square$

Лемма 5 *Центрами фасет F_i и $F(S)$ являются векторы $c_i = \gamma_i e_i$ и $c_S = \frac{1}{2}(\sum_{i \in S} \gamma_i e_i - \sum_{j \in N-S} \gamma_j e_j)$, соответственно.*

Доказательство. Пусть $x \in F(N)$. Рассмотрим точку $y = 2c_N - x = \sum_{i \in N}(\gamma_i - x_i)e_i$, которая симметрична точке x относительно точки c_N. Так как $0 \leq x_i \leq \gamma_i$, то $0 \leq \gamma_i - x_i \leq \gamma_i$, т.е. точка y удовлетворяет неравенства (18). Так как $x(N) = x(S) + x(N - S) = \frac{1}{2}\gamma(N)$ и $x(N - S) \leq \gamma(N - S)$, то $y(S) - y(N - S) = \gamma(S) - x(S) - \gamma(N - S) + x(N - S) = \gamma(N) - 2\gamma(N - S) - x(N) + 2x(N - S) = \frac{1}{2}\gamma(N) - 2(\gamma(N - S) - x(N - S)) \leq \frac{1}{2}\gamma(N)$. Поэтому точка $y = 2c_N - x$ удовлетворяет все неравенства (19). Следовательно c_N есть центр фасеты $F(N)$. Преобразование χ_S переводит его в центр c_S фасеты $F(S)$.

Аналогично, пусть $x \in F_i$. Поэтому $x_i = \gamma_i$. Рассмотрим точку $y = 2c_i - x = 2\gamma_i e_i - x$. Очевидно, что неравенства (18) выполнены для y при всех $i \in N$. Пусть $S \ni i$. Тогда левая часть неравенства (19) для точки y и множества S принимает вид $2\gamma_i - x(S) + x(N - S) = x(N - (S - \{i\})) - x(S - \{i\})$. А это есть левая часть неравенства (19) для x и множества $N - (S - \{i\})$. Поэтому $x(N - (S - \{i\})) - x(S - \{i\}) \leq \frac{1}{2}\gamma(N)$ и y удовлетворяют все неравенства (19). Так как $y_i = \gamma_i$, то $y \in F_i$. $\square$

Нетрудно убедиться, что если $x_i = \gamma_i$, то $x_i^* = (2c_N - x)_i = 0$.

Перепишем ограничения (19) в следующем удобном виде

$$x(S) \leq \frac{1}{4}\gamma(N) + \frac{1}{2}x(N). \tag{21}$$

Для $x \in P_n(\gamma)$ введем семейство тех множеств S, для которых $F(S) \ni x$,

$$\mathcal{S}(x) = \{S \subseteq N : x(S) = \frac{1}{4}\gamma(N) + \frac{1}{2}x(N)\}. \tag{22}$$

Заметим, что для любых $S, T \subseteq N$ и любого x выполняется *модулярное* равенство $x(S) + x(T) = x(S \cap T) + x(S \cup T)$.

Лемма 6 *Пусть $x \in P_n(\gamma)$ и $S, T \in \mathcal{S}(x)$. Тогда $S \cap T, S \cup T \in \mathcal{S}(x)$. Семейство $\mathcal{S}(x)$ имеет минимальное $S_0(x)$ и максимальное $S^0(x)$ по включению множества. Если $x \geq 0$, то*

$$\mathcal{S}(x) = \{S \subseteq N : S_0(x) \subseteq S \subseteq S^0(x)\}$$

и $x_i = 0$ для всех $i \in S^0(x) - S_0(x)$.

Доказательство первого утверждения вытекает из следующей цепочки равенств и неравенств

$$\frac{1}{2}\gamma(N) + x(N) = x(S) + x(T) = x(S \cap T) + x(S \cup T) \le \frac{1}{2}\gamma(N) + x(N).$$

Поэтому семейство $\mathcal{S}(x)$ обладает минимальным $S_0(x)$ и максимальным $S^0(x)$ множествами, т.е.

$$S_0(x) = \cap_{S \in \mathcal{S}(x)} S, \;\; S^0(x) = \cup_{S \in \mathcal{S}(x)} S.$$

Если $x \ge 0$, и $S_0(x) \subseteq S \subseteq S^0(x)$, то $\frac{1}{4}\gamma(N) + \frac{1}{2}x(N) = x(S_0(x)) \le x(S) \le x(S^0(x))) = \frac{1}{4}\gamma(N) + \frac{1}{2}x(N)$, и следовательно $S \in \mathcal{S}(x)$.

Пусть $S = S_0(x) \cup \{i\} \subseteq S^0(x)$. Тогда $x(S_0(x)) = x(S) = x(S_0(x)) + x_i$, т.е. $x_i = 0$ для всех $i \in S^0(x) - S_0(x)$. □

Предложение 1 *Любая вершина $v = \sum_{i \in N} v_i e_i$ фасеты $F(N)$ имеет координаты*

$$v_i = \gamma_i, \;\; i \in S_1, \;\; v_k = \frac{1}{2}\gamma(N) - \gamma(S_1), \;\; v_l = 0, \;\; l \in N - (S_1 \cup \{k\}), \tag{23}$$

где $k \notin S_1$ и множество S_1 удовлетворяет неравенства

$$\frac{1}{2}\gamma(N) - \gamma_k \le \gamma(S_1) \le \frac{1}{2}\gamma(N). \tag{24}$$

Любая вершина параллелоэдра $P_n(\gamma)$ есть $\chi_S(v) = \sum_{i \in S} v_i e_i - \sum_{i \in N-S} v_i e_i$ для некоторой вершины $v \in F(N)$ и некоторого $S \subseteq N$.

Доказательство. Для вершины $v \in F(N)$ часть неравенств (18) и (19) выполняется как равенства. Система этих равенств однозначно определяет вершину v. Так как, согласно Лемме 4, имеем $v_i \ge 0$ для всех $i \in N$, то неравенства (18) могут дать только равенства вида $v_i = \gamma_i$. Пусть $S_1 = \{i \in N : v_i = \gamma_i\}$.

Так как $v_i \ge 0$, то $v(S) \le v(N)$ для всех $S \subseteq N$. В частности, для $S \in \mathcal{S}(v)$ это неравенство и неравенство (21) дают $v(S) = \frac{1}{4}\gamma(N) + \frac{1}{2}v(N) \le v(N) \le \frac{1}{4}\gamma(N) + \frac{1}{2}v(N)$. Отсюда вытекает, что $S^0(v) = N$. Так как v есть вершина, то равенства $v(S) = \frac{1}{4}\gamma(N) + \frac{1}{2}v(N)$ для $S \in \mathcal{S}(v)$ должны определять координаты v_i для $i \in N - S_1$. Согласно лемме 6, эти равенства дают $v_i = 0$ для $i \in N - S_0(v)$. Поэтому $S_1 \subseteq S_0(v)$. Итак, из нашей системы равенств мы определили значения координат v_i для всех i, кроме $i \in S_0(v) - S_1$. Так как осталось лишь одно неиспользованное равенство $v(S_0(v)) = \frac{1}{4}\gamma(N) + \frac{1}{2}v(N)$, т.е. $v(S_0(v)) = \frac{1}{2}\gamma(N)$, то $|S_0(v) - S_1| = 1$. Пусть $S_0(v) = S_1 \cup \{k\}$. Тогда $v(S_0(v)) = \gamma(S_1) + v_k = \frac{1}{2}\gamma(N)$. Мы получили значения координат, приведенные в (23). Так как $0 \le v_k \le \gamma_k$, то для множества S_1 должны выполняться неравенства $0 \le \frac{1}{2}\gamma(N) - \gamma(S_1) \le \gamma_k$, т.е. неравенства (24).

Замечу, что всякая вершина v многогранника $P(\gamma)$ лежит на фасете $F(S)$ для некоторого $S \subseteq N$. Действительно, если это не так, то v есть вершина параллелепипеда $\mathbb{Q}_n(\gamma)$. Но вершины $\mathbb{Q}_n(\gamma)$ отрезаются гиперплоскостями, определяемые неравенствами

$\langle q(S), x\rangle \le \frac{1}{4}\gamma(N)$. Поэтому любая вершина получается из некоторой вершины фасеты $F(N)$ преобразованием χ_S. $\square$

Обозначим вершину с координатами (23) как $v(S_1,k)$. Для фиксированного множества S_1 Предложение 1 описывает множество вершин $v(S_1,k)$ для тех $k\in N-S_1$, для которых выполняются ограничения (24).

Если ограничения (24) выполнены для k и l, то существуют вершины $v(S_0\cup\{l\},k)=\sum_{i\in S_0}\gamma_ie_i+\gamma_le_l+(\frac{1}{2}\gamma(N)-\gamma(S_0)-\gamma_l)e_k$ и $v(S_0\cup\{k\},l)=\sum_{i\in S_0}\gamma_ie_i+\gamma_ke_k+(\frac{1}{2}\gamma(N)-\gamma(S_0)-\gamma_k)e_l$. Поэтому $v(S_0\cup\{l\},k)-v(S_0\cup\{k\},l)=(\frac{1}{2}\gamma(N)-\gamma(S_0\cup\{kl\}))(e_k-e_l)$. Это означает, что эти вершины смежны по ребру, параллельному вектору (корню) $r=e_k-e_l$. Вороной в [2] называет вектор e_k-e_l *характеристикой* этого ребра, а величину $\frac{1}{2}\gamma(N)-\gamma(S_0\cup\{kl\})$ его *регулятором*. Если регулятор стремится к 0, то тип параллелоэдра меняется в точке, где регулятор становится равным 0.

11 Степень нежесткости параллелоэдра $P_n(\gamma)$

Напомню, что степень нежесткости параллелоэдра $P=P_n(\gamma)$ есть размерность области $\Delta(P)$ типа $\tau(P)$ этого параллелоэдра. Если эта область одномерна, т.е. она есть луч, то параллелоэдр P называется *жестким* или в терминологии С.С.Рышкова *коренным*. Область $\Delta(P)$ есть конус, так как тип параллелоэдров $P_n(\gamma)$ и $P_n(\lambda\gamma)$, где $\lambda>0$, один и тот же. Этот конус многогранный, так как его грани определяются линейными ограничениями, наложенными на вектор параметров γ. Наша задача $-$ найти эти ограничения.

При изменении γ мы можем выйти на границу многогранного конуса $\Delta(P)$. В частности, это происходит тогда, когда размерность некоторых граней параллелоэдра $P_n(\gamma)$ изменяется и возникают новые ограничения на вектор параметров γ. Эти новые ограничения (зависимости) происходят от того, что минимальные нормы векторов некоторых классов четности сравниваются и множество минимальных векторов этих классов меняются.

В случае параллелоэдра $P_n(\gamma)$ сложные классы четности $C(T)$ минимальных векторов определяются множествами $T\subset N$. Класс $C(T)$ содержит векторы $p(S,T)=e(S)-e(T-S)$ и $p(S',N-T)$, где $\emptyset\subseteq S\subseteq T$ и $\emptyset\subseteq S'\subseteq N-T$, соответственно.

Итак, мы имеем вектор параметров $\gamma\in\mathbb{R}^n_+$, который есть точка положительного ортанта. Этот вектор определяет параллелоэдр $P_n(\gamma)$, описанный неравенствами в (17). Если параллелоэдр $P_n(\gamma_0)=P$ фиксирован, то мы хотим найти область типа $\Delta(P)=\{\gamma\in\mathbb{R}^n_+:\tau(P_n(\gamma))=\tau(P)\}$ этого параллелоэдра, где, напомню, $\tau(P)$ есть тип параллелоэдра P. Из этого выражения видно, что степень нежесткости параллелоэдра $P_n(\gamma)$ равна n, если γ есть внутренняя точка области $\Delta(P)$.

Пусть $\beta>0$. Для дальнейшего важны следующие векторы параметров:

$$\gamma^l_t=\{\gamma_i=\beta, i\in N-\{l\},\ \gamma_l=t\beta\},\ \text{где } l\in N \text{ и } t\ge 0. \tag{25}$$

При $t\neq 1$, а для четных $n=2m$ и для $t=1$, эти векторы определяют крайние лучи некоторых L-областей. Так как вектор γ^l_1 не зависит от l, то ниже он обозначается γ_1.

Точку γ_t^l удобно представить в виде

$$\gamma_t^l = \sum_{i\in N} \beta e_i + (t-1)\beta e_l = \beta e(N) + (t-1)\beta e_l.$$

Поэтому

$$\gamma_t^l - \gamma_1 = (t-1)\beta e_l, \text{ т.е. } \gamma_0^l - \gamma_1 = -\beta e_l,\ \gamma_2^l - \gamma_1 = \beta e_l.$$

Важно отметить случай $t = 0$, когда $P_n(\gamma_0^l) = P_{n-1}(\gamma_1)$ есть параллелоэдр размерности на 1 меньше, который лежит в пространстве $\{x_i : i \in N - \{l\}\}$.

Для вектора параметров $\gamma = \gamma_t^l$ найдем минимальные относительно формы $f_\gamma(p) = \sum_{i\in N} \gamma_i p_i^2$ векторы $p \in \mathcal{P}_D(n)$ всех классов четности. Для $\gamma = \gamma_t^l$ имеем $\gamma_t^l(N) = \sum_{i\in N} \gamma_i = \beta(n-1+t)$ и $\gamma_t^l(N)$ не зависит от l.

Замечу, что $\gamma_1(N) = 2m\beta$, если $n = |N| = 2m$ четно, и $\gamma_2^l(N) = 2(m+1)\beta$, если $n = 2m+1$ нечетно, где $m \geq 1$ есть целое число.

Для дробных векторов $q(S) = e(S) - \frac{1}{2}e(N)$ имеем $f_\gamma(q(S)) = \frac{1}{2}\gamma(N) = n_t\beta$, где $n_t = \frac{1}{2}(n-1+t)$.

Для целых векторов $p(S,T) = 2e(S) - e(T)$, где $\emptyset \subseteq S \subseteq T \subseteq N$, получаем $f_\gamma(p(S,T)) = \sum_{i\in T} \gamma_i = \gamma(T)$. Поэтому для $\gamma = \gamma_t^l$ имеем

$$f_\gamma(p(S,T)) = \begin{cases} |T|\beta, & \text{если } l \notin T \\ (|T|-1+t)\beta, & \text{если } l \in T. \end{cases} \tag{26}$$

В частности,

$$f_\gamma(e_i) = \beta, \text{ если } i \neq l,\ f_\gamma(e_l) = t\beta;$$

$$f_\gamma(e_i \pm e_j) = 2\beta, \text{ если } i,j \neq l,\ f_\gamma(e_i \pm e_l) = (t+1)\beta.$$

Напомню, что классу $C(T)$ принадлежат также векторы $p(S', N-T)$. Очевидно, что всегда либо $l \in T$, либо $l \in N - T$. Найдем те значения t, для которых выполняется равенство $f_\gamma(p(S,T)) = f_\gamma(p(S', N-T))$. Пусть $l \in T$. Из (26) получаем, что равенство $f_\gamma(p(S,T)) = f_\gamma(p(S', N-T))$ эквивалентно равенству

$$|T| - 1 + t = n - |T|, \text{ т.е. } t = n + 1 - 2|T|.$$

Лемма 7 *Если $t = n+1-2|T|$ для некоторых подмножеств $T \subset N$ фиксированной мощности, то для $\gamma = \gamma_t^l$ выполнены равенства*

$$\gamma(T) = \gamma(N-T). \tag{27}$$

Доказательство. Выше было показано, что равенство $t = n+1-|T|$, где $l \in T$, эквивалентно равенству $f_\gamma(p(S,T)) = f_\gamma(p(S', N-T)$ для любых $S \subseteq T$ и $S' \subseteq N-T$. Так как $f_\gamma(p(S,T)) = \gamma(T)$, то для $t = n+1-2|T|$ выполняются равенства (27) для всех множеств T одинаковой мощности. □

Лемма 8 *Равенства $\gamma(T) = \gamma(N-T)$ для всех множеств $T \subseteq N$ фиксированной мощности $|T|$ и содержащих l, однозначно (с точностью до общего множителя) определяют значения параметров γ_i для всех $i \in N$.*

Доказательство. Пусть $i \in T$, $j \in N - T$ и $T' = (T - \{i\}) \cup \{j\}$, где $i \neq l$, $j \neq l$. Тогда $|T'| = |T|$ и $l \in T'$. Поэтому равенство $\gamma(T') = \gamma(N - T')$ дает $\gamma(T) - \gamma_i + \gamma_j = \gamma(N - T) + \gamma_i - \gamma_j$, т.е. $\gamma_i = \gamma_j$. Эти равенства выполняются для всех $i, j \in N$ таких, что $i, j \neq l$, т.е. $\gamma_i = \beta$ для всех $i \in N - \{l\}$. Так как $l \in T$, то равенство $\gamma(T) = \gamma(N - T)$ принимает вид $(|T| - 1)\beta + \gamma_l = (n - |T|)\beta$, т.е. $\gamma_l = (n + 1 - 2|T|)\beta$. Таким образом параметры γ_i для всех $i \in N$ определены однозначно с точностью до положительного множителя β и $\gamma = \gamma_t^l$, где $t = n + 1 - 2|T|$. □

Из леммы 8 вытекает следующее утверждение, где ограничения $0 \leq t \leq n-3$ следуют из неравенств $\gamma_l \geq 0$ и $|T| \geq 2$.

Предложение 2 *Если $t = n + 1 - 2|T|$ для множества $T \ni l$ некоторой фиксированной мощности $|T|$ такой, что $2 \leq |T| \leq \frac{n}{2}$, то параллелоэдр $P(\gamma_t^l)$ коренной, т.е. его область типа есть луч $\gamma = \lambda\gamma_t^l$, где $\lambda \geq 0$ и $0 \leq t \leq n - 3$.* □

Из предложения 2 вытекает, что формы f_γ для $\gamma = \gamma_t^l$, где $t = n + 1 - 2|T|$, $l \in T \subset N$ и $2 \leq |T| \leq \frac{n+1}{2}$, лежат на крайних лучах L-областей. Особенно интересны пограничные случаи, когда $|T| = 2$ и $|T| = \frac{n}{2}$. Если $|T| = 2$, то $t = n - 3$ и форма $f_{\gamma_t^k}$ для $t = n - 3$ в другом базисе есть форма ω, найденная Вороным в [2] (подробности см. в разделе 16 этого препринта).

Если $n = 2m$ четно, то максимальная мощность множества T равна m и для него $t = 2m + 1 - 2m = 1$. Если $n = 2m + 1$ нечетно, то максимальная мощность множества T тоже равна m, и для него $t = 2m + 2 - 2m = 2$. Так как $|T| \geq 2$, то предложение 2 имеет следующее

Следствие 1 *Пусть $m \geq 2$ есть целое число. Параллелоэдры $P_{2m}(\gamma_1)$ и $P_{2m+1}(\gamma_2^l)$, где $l \in N$, суть жесткие (коренные) параллелоэдры.* □

Изучим вершины фасеты $F(N)$ параллелоэдра $P_n(\gamma_t^l)$. Напомню, что вершины имеют вид $v = v(S_1, k)$, где $S_1 \subseteq N - \{k\}$ и $v_i = \gamma_i$ для $i \in S_1$, $v_k = \frac{1}{2}\gamma(N) - \gamma(S_1)$ и $v_j = 0$ для $j \in N - \{k\} - S_1$. На множество S_1 наложены ограничения $\frac{1}{2}\gamma(N) - \gamma_k \leq \gamma(S_1) \leq \frac{1}{2}\gamma(N)$, где $\frac{1}{2}\gamma(N) = n_t\beta$ и $n_t = \frac{1}{2}(n - 1 + t)$. В соответствии с этим возможны следующие три случая:

1) $k \neq l$, $l \notin S_1$, 2) $k \neq l$, $l \in S_1$, 3) $k = l$, $l \notin S_1$.

Обозначим через v^S точку с координатами $v_i^S = \beta$ для $i \in S$ и $v_j^S = 0$ для $j \notin S$. Напомню, что точка $v(S, l)$ имеет координаты $v_i(S, l) = \gamma_i$ для $i \in S$, $v_i(S, l) = 0$ для $i \in N - (S \cup \{l\})$ и $v_l(S, l) = \frac{1}{2}\gamma(N) - \gamma(S)$.

Лемма 9 *Вершины $v = v(S_1, k)$ фасеты $F(N)$ параллелоэдра $P(\gamma_t^l)$, где $n_t = \frac{1}{2}(n - 1 + t)$ есть целое число, имеют следующий вид:*

(1) $v = v^S$ для всех $S \subseteq N - \{l\}$ мощности $|S| = n_t$, если $k \neq l$ и $l \notin S_1$;

(2) $v = v^S$, где $l \in S \subseteq N$ и $|S| = n_t - t + 1$, если $k \neq l$ и $l \in S_1$;

(3) $v = v(S, l)$, где $v_l = (n_t - |S|)\beta$ и $S \subseteq N - \{l\}$ есть такое множество, что $n_t - t \leq |S| \leq n_t$, и тогда $0 \leq v_l \leq t$.

Доказательство. Случай 1). Так как в этом случае $l \notin S_1$, то $\gamma(S_1) = \beta|S_1|$. Поэтому $v_k = (n_t - |S_1|)\beta$ и неравенства (24) принимают вид $n_t - 1 \le |S_1| \le n_t$. Если $|S_1| = n_t - 1$, то $v_k = \beta$ и пусть $S = S_1 \cup \{k\}$. Если $|S_1| = n_t$, то $v_k = 0$ и пусть $S = S_1$. В обоих случаях $|S| = n_t$. Получили утверждение (1).

Случай 2). Пусть $l \in S_1$ и $k \neq l$. В этом случае $\gamma(S_1) = (|S_1| - 1 + t)\beta$, $v_k = (n_t - |S_1| + 1 - t)\beta$ и $n_t - t \le |S_1| \le n_t - t + 1$. Если $|S_1| = n_t - t$, то $v_k = \beta$, и пусть $S = S_1 \cup \{k\}$. Если $|S_1| = n_t - t + 1$, то $v_k = 0$, и пусть $S = S_1$. Получили утверждение (2).

Случай 3). В этом случае $k = l \notin S_1$ и $v_k = v_l = (n_t - |S_1|)\beta$ и неравенства (24) принимают вид $n_t - t \le |S_1| \le n_t$. Положив $S = S_1$, получим утверждение (3). □

Лемма 9 может быть переформулирована в следующем виде.

Предложение 3 *Вершины фасеты $F(N)$ параллелоэдра $P_n(\gamma_t^l)$, где $t = n + 1 - 2|T|$, $T \subset N$ и $2 \le |T| \le \frac{n+1}{2}$, имеют следующий вид:*

$$v = v^S \text{ для всех } S \subset N \text{ мощности } |S| = |T|, \text{ если } l \in S,$$

$$\text{и мощности } |S| = n - |T|, \text{ если } l \notin S,$$

$$v = v(S, l), \text{ если } |T| < |S| < n - |T|.$$

□

Замечу, что если $n = 2m+1$ нечетно и $|T| = m$ или $|T| = m+1$, то никакое множество S не удовлетворяет неравенства $|T| < |S| < 2m + 1 - |T|$. Поэтому справедливо

Следствие 2 *Вершины фасеты $F(N)$ параллелоэдра $P_{2m+1}(\gamma_t^l)$ суть v^S, где $|S| = m$ и $l \notin S$, если $t = 0$, или $l \in S$, если $t = 2$.*

В следствии 2 можно считать также, что вершины фасеты $F(N)$ параллелоэдра $P_{2m+1}(\gamma_t^l)$ суть v^S, где $|S| = m + 1$ и $l \in S$ или $l \notin S$ соответственно тому, что $t = 0$ или $t = 2$.

12 ДВ-ячейка $P(D_n^*)$ и область ее типа

ДВ-ячейка $P(D_n^*)$ решетки D_n^* описана в статьях [11], [18]. Она и ее область типа $\mathcal{F}_L(D_n^*)$ рассмотрены в работе [24] и для $n = 5$ в статье [21].

Напомню, что множество $\mathcal{P}_0(n)$ (см. (15)) есть подмножество векторов решетки D_n^*, состоящее из нормальных векторов фасет ДВ-ячейки $P(D_n^*)$.

Форма f_0 ДВ-ячейки $P(D_n^*)$ лежит на центральном луче второй совершенной области. Этот луч задается равенствами $b_r = b$ для всех $r \in \mathbb{D}_n$. Поэтому многогранник $P(\gamma)$, определенный в (17), где $\gamma_i = \frac{1}{2}$ есть ДВ-ячейка $P(D_n^*)$. Более того, в определении $P(\gamma)$ можно вернуться к исходному множеству $\mathcal{P}_D(n)$. Гиперплоскости $H_p(\frac{1}{2}p^2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x\rangle = \frac{1}{2}p^2\}$ являются опорными для всех $p \in \mathcal{P}_D(n)$. Это означает, что множество $P_D(n)$ есть множество *контактных* векторов ДВ-ячейки $P(D_n^*) \equiv P_n(\gamma_1)$, где $\gamma_1 = \{\gamma_i = \frac{1}{2} : i \in N\}$.

Так как $\gamma_i = \frac{1}{2}$ и $\gamma(N) = \frac{n}{2}$, то $P(D_n^*) = \mathbb{Q}_n \cap \mathbb{O}_n$, где $\mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}_n(\frac{1}{2})$ и $\mathbb{O}_n = \mathbb{O}_n(\frac{n}{4})$ суть единичный куб и двойственный ему ортаэдр, соответственно, оба с центром в начале. Напомню, что вершины ортаэдра $\frac{2}{n}\mathbb{O}_n$ суть центры фасет куба $\mathbb{Q}_n$, а многогранники $\mathbb{O}_n(a_0)$ и $\mathbb{Q}_n(\gamma)$ определены в предыдущем разделе.

Контактными векторами сложных классов четности формы $f_0(p) = \frac{1}{2}p^2$ являются векторы $p(S,T) = 2e(S) - e(T)$, где $S \subseteq T \subset N$ и $2 \le |T| \le \frac{1}{2}n$. Поэтому опорные гиперплоскости многогранника $P_n(\gamma)$ определяются векторами $p = e_i$, $i \in N$, $q(S)$, $S \subseteq N$, и $p(S,T)$ для выше названных множеств S и T.

Для $T \subseteq N$ введем следующее множество контактных векторов

$$Q_k(T) = \{p(S,T) : S \subseteq T\},$$

где мощность $|T| = k$. Напомню, что $2 \le k \le \frac{n}{2}$. Все 2^k векторов множества $Q_k(T)$ принадлежат одному классу четности. Нетрудно убедиться, что выпуклая оболочка концевых точек всех векторов множества $Q_k(T)$ есть k-мерный куб с центром в начале, стороны которого параллельны базисным векторам e_i для всех $i \in T$. Отсюда вытекает, что размерность контактной грани, соответствующей любому вектору $p \in Q_k(T)$, равна $n - k$.

Так как $q(N) = \frac{1}{2}e(N)$ есть вектор решетки D_n^*, то для фиксированного множества T векторы $p(S,T)$ и $p(S', N-T)$ принадлежат одному классу четности.

Так как $f_{\gamma_1}(p(S,T)) = \beta|T|$ и $|N-T| = n-|T|$, то при $|T| = k < m$ имеем $n-|T| > n-m$. Поэтому в обоих случаях $n = 2m$ и $n = 2m+1$ имеем $n - k > m$. Отсюда вытекает, что если $k < m$, то $C(T) = Q_k(T)$.

Если $n = 2m$ четно и $|T| = m$, то множество контактных векторов $Q_m(T) \cup Q_m(N-T)$ содержит оба типа векторов одного класса четности. На эти векторы натянуто пространство размерности $n = 2m$. Поэтому при четном $n = 2m$ контактные грани, соответствующие контактным векторам множества $Q_m(T) \cup Q_m(N-T)$, суть вершины многогранника $P(D_{2m}^*)$. Этот факт подтверждается результатами предыдущего раздела.

Область типа $\mathcal{F}_L(D_n^*)$ параллелоэдра $P(D_n^*)$ лежит целиком в $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$. В [39] показано, что область $\mathcal{F}_L(D_n^*)$ является n-мерной областью зонно-сжатого типа для нечетных n и одномерной зонно-сжатой областью для четных n. Таким образом, для четных n параллелоэдр $P(D_n^*)$ лежит на крайнем луче замыкания некоторой общей области.

Для нечетных n область $\mathcal{F}_L(D_n^*)$ имеет $2n$ крайних лучей двух типов: n крайних лучей $f(\gamma_0^l)$ ранга $n-1$, натянутых на формы ДВ-ячейки $P(D_{n-1}^*)$, где ДВ-ячейки $P(D_{n-1}^*)$ разных лучей лежат в гиперплоскостях $x_l = 0$, $1 \le l \le n$, и n крайних лучей другого типа $f(\gamma_2^l)$, $1 \le l \le n$. В этом раделе я докажу это вновь, но более прозрачным способом.

Итак, $P(D_n^*) = P_n(\gamma_1)$, где $\gamma_1 = \gamma_1^l$ определено в (25) и $\beta = \frac{1}{2}$. Предложение 1 полностью описывает его вершины.

Согласно следствию 1, для четных $n = 2m$ параллелоэдр $P_{2m}(\gamma_1)$ коренной, т.е. его область типа есть луч $\{\gamma_1 : \gamma_i = \beta, i \in N\}$.

В случае, когда $\gamma_i = \beta$ для всех $i \in N$, неравенства (24) принимают вид $\frac{1}{2}n - 1 \le s \le \frac{1}{2}n$, где $s = |S_1|$, и тогда $v_k = (\frac{1}{2}n - s)\beta$, где напомню, в общем случае, v_k есть вершина v такая, что $v_k \ne 0, \gamma_k$.

Если $n = 2m+1$, то неравенство $\frac{1}{2}n - 1 \le s \le \frac{1}{2}n$ принимает вид $m - \frac{1}{2} \le s \le m + \frac{1}{2}$. Так как s есть целое число, то это неравенство выполнено только, если $s = m$. В этом случае $v_k = \frac{1}{2}\beta$. Напомню, что $|S_1| = s = m$ и $k \notin S_1$.

Найдем область типа параллелоэдра $P_{2m+1}(D^*_{2m+1}) \equiv P_{2m+1}(\gamma_1)$. Она есть область форм a таких, что $\tau(P(a)) = \tau(P_{2m+1}(\gamma_1))$.

Так как значение $\gamma(p(S,T)) = \gamma(T)$ не зависит от S для любого вектора $\gamma \in \mathbb{R}^n_+$, то, согласно лемме 3, $a(p) = f_\gamma(p) = \sum_{i\in N}\gamma_i p_i^2$, где $\gamma_i = a(e_i)$. Это значит, что все параллелоэдры P, имеющие тип параллелоэдра $P_{2m+1}(\gamma_1)$, имеют вид $P = P_{2m+1}(\gamma)$, для некоторых γ. Найдем область таких γ.

Мы знаем, что контактные векторы сложных классов четности $C(T)$ параллелоэдра $P_{2m+1}(\gamma_1)$ суть векторы $p(S,T)$, где $2 \le |T| \le m$. Напомним, что векторы $p(S, N-T)$ тоже принадлежат классу $C(T)$, но $a(p(S,T)) < a(p(S', N-T))$, если $|T| \le m$. Для квадратичной формы $a(p) = f_\gamma(p)$ эти неравенства дают следующие ограничения на вектор γ

$$\gamma(T) < \gamma(N-T) \text{ для всех множеств } T \subset N \text{ таких, что } 2 \le |T| \le m.$$

Если здесь заменить строгие неравенства на нестрогие, то они будут ограничивать замыкание области изменения γ.

Замечу, что неравенства для множеств T мощности $|T| = m$ доминируют над другими неравенствами. Действительно, пусть $|S| < m$ и $S \subset T$, где $|T| = m$. Тогда $N-T \subset N-S$, и так как $\gamma > 0$, то

$$\gamma(S) < \gamma(T) < \gamma(N-T) < \gamma(N-S),$$

т.е. неравенства для S вытекают из неравенств для T.

Так как $\gamma(N-S) = \gamma(N) - \gamma(S)$, то замыкание рассматриваемой области описывается неравенствами

$$\gamma(S) \le \frac{1}{2}\gamma(N) \text{ для всех множеств } S \subset N \text{ мощности } |S| = m.$$

Эти неравенства описывают конус $\mathcal{G}_{2m+1}$ в положительном ортанте $\mathbb{R}^{2m+1}_+$.

Пусть $\gamma = \sum_{i\in N}\gamma_i e_i$ есть точка положительного ортанта $\mathbb{R}^n_+$. Тогда неравенства $\gamma(S) \le \frac{1}{2}\gamma(N)$ для $S \subseteq N$ удобно записать в виде $\gamma(S) - \gamma(N-S) \le 0$, т.е. в виде

$$\langle q(S), \gamma\rangle \le 0,\ S \subset N,\ |S| = m.$$

Так как эти неравенства описывают конус $\mathcal{G}_{2m+1}$, то векторы $q(S)$ суть нормальные векторы фасет этого конуса для всех множеств S мощности $|S| = m$. Так как $q(N-S) = -q(S)$, то нормальные векторы фасет конуса $\mathcal{G}_{2m+1}$ суть также и векторы $q(S)$ для S мощности $|S| = m+1$.

Крайние лучи конуса $\mathcal{G}_{2m+1}$ являются решениями системы равенств $\gamma(S) = \frac{1}{2}\gamma(N)$ для некоторого семейства множеств. Для данного вектора γ определим семейство

$$\mathcal{S}(\gamma) = \{S : \gamma(S) = \frac{1}{2}\gamma(N),\ S \subset N,\ |S| = m\}.$$

Замечу, что если $\gamma(S) = \frac{1}{2}\gamma(N) = \frac{1}{2}(\gamma(S) + \gamma(N-S))$, то $\gamma(S) = \gamma(N-S)$. Поэтому следующая система равенств

$$\gamma(S) = \gamma(N-S) = \frac{1}{2}\gamma(N) \text{ для всех } S \in \mathcal{S}(\gamma) \tag{28}$$

должна, в частности, определить крайние лучи конуса $\mathcal{G}_{2m+1}$.

Пусть $\gamma = \gamma_t^l$, где γ_t^l определено в (25). Тогда $\gamma_i = \beta$ для всех $i \in N - \{l\}$ и $\gamma_l = t\beta$. Поэтому $\frac{1}{2}\gamma(N) = (m + \frac{t}{2})\beta$ и $\mathcal{S}(\gamma_t^l) \neq \emptyset$ только, если $t = 0$ или $t = 2$. Тогда

$$\mathcal{S}(\gamma_0^l) = \{S \subseteq N - \{l\}, |S| = m\} \text{ и } \mathcal{S}(\gamma_2^l) = \{S \subseteq N, l \in S, |S| = m\}.$$

Покажем, что система равенств (28) для $\mathcal{S}(\gamma) = \mathcal{S}(\gamma_t^l)$ однозначно определяет $\gamma = \gamma_t^l$, где $t = 2, 0$ и $m \geq 2$.

Пусть $S \in \mathcal{S}(\gamma_t^l)$, $i \in S$, $j \in N - S$ и $i, j \neq l$. Тогда для $S_{ij} = (S - \{i\}) \cup \{j\}$ имеем $S_{ij} \in \mathcal{S}(\gamma_t^l)$ и поэтому $\gamma(S_{ij}) = \gamma(S) - \gamma_i + \gamma_j = \gamma(S)$, т.е. $\gamma_i = \gamma_j$. Так как для любых $i, j \in N - \{l\}$, $i \neq j$, найдутся соответствующие множества S, S_{ij}, то система равенств (28) дает $\gamma_i = \beta$ для всех $i \in N - \{l\}$.

Если $l \notin S$, то $l \in N - S$ и поэтому $\gamma(S) = \beta|S|$, $\gamma(N - S) = \beta|S| + \gamma_l$, и следовательно $\gamma_l = 0$.

Если $l \in S$, то $\gamma(S) = \beta(m-1) + \gamma_l$, $\gamma(N - S) = \beta(m+1)$, и следовательно $\gamma_l = 2\beta$.

Отсюда вытекает, что на векторы γ_0^l и γ_2^l натянуты на крайние лучи конуса $\mathcal{G}_{2m+1}$.

Покажем, что конус $\mathcal{G}_{2m+1}$ не имеет других крайних лучей. Рассмотрим конусную оболочку $\mathcal{G}_{2m+1}^0$ этих $2n$ векторов γ_0^l и γ_2^l для всех $l \in N$.

Назовем *коточкой* семейства векторов $K = \{\gamma_0^l, \gamma_2^l : l \in N\}$ такое максимальное по включению подмножество $K(S,T) = \{\gamma_2^l : l \in S\} \cup \{\gamma_0^l : l \in T\} \subset K$, что его векторы линейно порождают гиперплоскость. Назовем *нормальным вектором* коточки $K(S,T)$ вектор p ортогональной гиперплоскости, натянутой на эту коточку. Нормальный вектор p однозначно (с точностью до множителя) определяется следующей системой равенств

$$\langle p, \gamma_2^l \rangle = 0 \text{ для } l \in S \text{ и } \langle p, \gamma_0^l \rangle = 0 \text{ для } l \in T. \tag{29}$$

Напомню, что $\gamma_2^l = \gamma_1 + \beta e_l$ и $\gamma_0^l = \gamma_1 - \beta e_l$, где $\gamma_1 = \beta e(N)$ и $e(N) = \sum_{i \in N} e_i$. В дальнейшем, ради простоты, положим $\beta = 1$. Тогда $\gamma_{2,0}^l = e(N) \pm e_l$. Для этих векторов имеем

$$\langle p, e(N) \pm e_l, \rangle = \sum_{i \in N} p_i \pm p_l$$

. Поэтому, если положить $\lambda = \sum_{i \in N} p_i$, то равенства (29) принимают вид

$$p_l = \begin{cases} -\lambda & \text{если } l \in S \\ \lambda & \text{если } l \in T \end{cases} \tag{30}$$

Лемма 10 *Коточки $K(S,T)$ множества K определяются парами множеств S, T, приведенными в таблице ниже. Там же даны их нормальные векторы p с точностью до скалярного множителя.*

№	*пары* S, T	*нормальные векторы*
1.	$S \cap T \neq \emptyset,\ S \cup T = N - \{ij\}$	$e_i - e_j$
2.	$S \cap T = \emptyset,\ S \cup T = N - \{k\}, \lvert S\rvert \neq m, m-1$	$e(T) - e(S) + (2\lvert S\rvert + 2 - n)e_k$
3.	$S \cap T = \emptyset,\ S \cup T = N,\ \lvert S\rvert = m$	$q(S)$

Доказательство. Используем равенства (30). Если $S\cap T\neq\emptyset$ и $l\in S\cap T$, то $p_l=\lambda=-\lambda$, т.е. $\lambda=0$. Отсюда вытекает, что $p_l=0$ для $l\in S\cup T$. Напомню, что $\lambda=\sum_{i\in N}p_i$. Так как $\lambda=0$, то для $l\in N-(S\cup T)$ получаем единственное уравнение $\sum_{i\in N-(S\cup T)}p_i=0$. Это уравнение дает ненулевой вектор однозначно с точностью до множителя только, если $|N-(S\cup T)|=2$. Пусть $N-(S\cup T)=\{i,j\}$. Тогда имеем $0=\lambda=\sum_{i\in N}p_i=p_i+p_j$, т.е. $p_i=-p_j$. Поэтому с точностью до множителя $p=e_i-e_j$, мы получили строчку 1 нашей таблицы.

Если $S\cap T=\emptyset$, то, используя (30), имеем $\lambda=\sum_{i\in N}p_i=-\lambda|S|+\lambda|T|+\sum_{l\in N-(S\cup T)}p_l$, т.е. $\sum_{l\in N-(S\cup T)}p_l=\lambda(|S|+1-|T|)$. Так как это есть единственное оставшееся уравнение для определения значений p_l для $l\in N-(S\cup T)$, то должно быть $|N-(S\cup T)|\in\{0,1\}$.

Пусть $N-(S\cup T)=\{k\}$. Тогда $|T|+|S|=n-1$ и $p_k=\lambda(1+|S|-(n-1)+|S|)=\lambda(2|S|+2-n)$. Поэтому, с точностью до множителя, $p=-e(S)+e(T)+(2|S|+2-n)e_k$. Так как γ_t^k для обоих значений t не лежит в гиперплоскости, ортогональной p, и $\sum_{i\in N}p_i=1$, то $\langle p,\gamma_t^k\rangle=1+(t-1)(2|S|+2-n)\neq 0$, т.е. $(t-1)(2|S|+1-2m)\neq -1$. Поэтому для $t=0$ имеем $|S|\neq m$, а для $t=2$ имеем $|S|\neq m-1$. Получили строчку 2 нашей таблицы.

Наконец, если $S\cap T=\emptyset$ и $S\cup T=N$, то, используя (30), имеем $\lambda=\sum_{i\in N}p_i=-\lambda|S|+\lambda|T|$, где $|S|+|T|=n$. Поэтому $\lambda(1+|S|-(n-|S|))=\lambda(2|S|-n+1)=0$. Следовательно $\lambda\neq 0$ только, если $2|S|=n-1$. Напомню, что $n=2m+1$. Поэтому, только если $|S|=m$, множество $K(S,T)$ в нашем случае будет коточкой. Ее нормальный вектор есть $p=\lambda(e(T)-e(S))$, т.е. с точностью до множителя $p=q(S)$. Получили строчку 3 нашей таблицы. $\square$

Найдем теперь те коточки, которые определяют фасеты конуса $\mathcal{G}^0_{2m+1}$. Нормальный вектор p коточки $K(S,T)$ является фасетным вектором этого конуса только, если скалярные произведения $\langle p,\gamma_l\rangle$ имеют одинаковый знак для всех $\gamma_l\in K-K(S,T)$. Это значит, что все крайние лучи лежат либо на гиперплоскости, натянутой на коточку $K(S,T)$, либо по одну сторону от нее.

Лемма 11 *Фасеты конуса $\mathcal{G}^0_{2m+1}$ определяются коточками, приведенными в строчке 3 таблицы.*

Доказательство. Напомню, что $\gamma_t^l=e(N)+(t-1)e_l$. Поэтому $\langle p,\gamma_t^l\rangle=\langle p,e(N)\rangle+(t-1)p_l$. Рассмотрим нормальные векторы всех трех типов коточек.

1. $p=e_i-e_j$. Так как $\langle p,e(N)\rangle=0$ и $p_l\neq 0$ только для $l=i,j$, то $\langle p,\gamma_t^l\rangle\neq 0$ только для $l=i$ и $l=j$, и тогда $\langle p,\gamma_2^i\rangle=\langle p,\gamma_0^j\rangle=1$ и $\langle p,\gamma_2^j\rangle=\langle p,\gamma_0^i\rangle=-1$. Так как γ_t^i и γ_t^j для обоих значений $t=2,0$ лежат по разные стороны соответствующей гиперплоскости, то отсюда вытекает, что нормальный вектор p не является фасетным вектором.

2. $p=e(T)-e(S)+(2|S|+2-n)e_k$. Так как $S\cup T=N-\{k\}$, то $|T|=n-1-|S|$, $\langle p,e(N)\rangle=1$ и $\langle p,\gamma_t^l\rangle=1+(t-1)p_k$. Следовательно $\langle p,\gamma_t^k\rangle=1+(t-1)(2(|S|-m)+1)$. Напомню, что $|S|\neq m,m-1$. Если $|S|<m-1$, то $\langle p,\gamma_0^k\rangle>0$ и $\langle p,\gamma_2^k\rangle<0$. Если $|S|>m$, то $\langle p,\gamma_0^k\rangle<0$ и $\langle p,\gamma_2^k\rangle>0$. Отсюда вытекает, что p не есть фасетный вектор.

3. Очевидно, что для множества S мощности $|S|=m$ имеем

$$\langle q(S),e(N)\rangle=\frac{1}{2}(|S|-|N-S|)=-\frac{1}{2}.$$

Кроме того

$$\langle q(S), e_l\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{если } l \in S \\ -\frac{1}{2} & \text{если } l \notin S \end{cases}$$

Поэтому

$$\langle q(S), \gamma_t^l\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-2) & \text{если } l \in S \\ -\frac{1}{2}t & \text{если } l \notin S \end{cases}$$

Пусть $F(S) = \{x : \langle q(S), x\rangle = 0\}$. Мы видим, что для $t = 2, 0$ либо $\langle q(S), \gamma_t^l\rangle = 0$ и тогда γ_t^l лежит в гиперплоскости $F(S)$, либо $\langle q(S), \gamma_t^l\rangle = -1$ и тогда все не лежащие в $F(S)$ крайние лучи лежат по одну сторону от гиперплоскости $F(S)$. Поэтому $F(S)$ есть опорная плоскость фасеты для всех множеств S мощности $|S|$. $\square$

Теперь мы можем доказать главный результат.

Лемма 12 *Конусы $\mathcal{G}_{2m+1}^0$ и $\mathcal{G}_{2m+1}$ совпадают, т.е. множество крайних лучей конуса $\mathcal{G}_{2m+1}$ есть множество лучей, натянутых на все векторы множества $K = \{\gamma_{2,0}^l : l \in N\}$.*

Доказательство. Мы знаем, что фасеты конуса $\mathcal{G}_{2m+1}$ определяются фасетными векторами $q(S)$ для всех множеств $S \subset N$ мощности $|S| = m$. Согласно лемме 11 фасеты конуса $\mathcal{G}_{2m+1}^0$ определяются теми же векторами. $\square$

Для S мощности $|S| = m$, пусть $G(S)$ есть фасета конуса $\mathcal{G}_{2m+1}$, соответствующая неравенству $\langle q(S), \gamma\rangle \leq 0$. Тогда $G(S)$ содержит точки γ_0^l для $l \notin S$ и γ_2^l для $l \in S$. Таким образом, для каждого $l \in N$ лишь одна из точек γ_0^l и γ_2^l принадлежит $G(S)$. Так как

$$\sum_{l \in N-S} \gamma_0^l = \sum_{l \in S} \gamma_2^l,$$

то $G(S)$ есть объединение двух симплициальных конусов, натянутых на γ_0^l, $l \in N-S$, и γ_2^l, $l \in S$. Эти конусы пересекаются по лучу, натянутому на точку $m\gamma_1 + \gamma^S$, где $\gamma_1 = \beta e(N)$ и $\gamma^S = \beta e(S)$.

Напомню, что точки γ_t^l для $l \in N$ и $t = 0, 2$ лежат на крайних лучах конуса $\mathcal{G}_{2m+1}$, а точка $\gamma_1^l = \gamma_1 = \beta e(N)$ не зависит от l и лежит на центральном луче этого конуса.

Отсюда вытекает, что выпуклая оболочка $2n$ точек γ_0^l, γ_2^l, взятых для всех $l \in N$, есть ортаэдр $\mathbb{O}_n$ с центром в точке $\gamma_1 = \beta e(N)$. Так как

$$\gamma_2^k - \gamma_2^l = \gamma_0^l - \gamma_0^k = \beta(e_k - e_l) \text{ и } \gamma_2^k - \gamma_0^l = \beta(e_k + e_l),$$

то ребра ортаэдра параллельны корням $e_i \pm e_j$, $i, j \in N$.

Нормальные векторы фасет этого ортаэдра суть векторы $q(S)$ для всех $S \subseteq N$. Но только для S мощности $|S| = m$ или $|S| = m + 1$ они являются нормальными векторами фасет конуса $\mathcal{G}_{2m+1}$. Остальные фасеты ортаэдра лежат внутри этого конуса.

13 Множество корней $\mathbb{D}_n$ и его подмножества

Многие параллелоэдры второй совершенной области являются зонотопами. Зонотоп есть сумма Минковского отрезков прямых. В нашем случае эти прямые натянуты на векторы множества $\mathbb{D}_n$. Чтобы понять, как устроены эти зонотопы, нужно изучить некоторые свойства подмножеств множества $\mathbb{D}_n$.

Рассмотрим некоторое множество векторов X. Подмножество $Y \subseteq X$ называется *независимым*, если векторы этого подмножества линейно независимы. Подмножество называется *зависимым*, если оно не является независимым. Минимальное по включению зависимое множество называется *циклом.* Чтобы отличить его от рассматриваемых ниже циклов в графе, назовем его М-циклом. Очевидно, что любое подмножество М-цикла независимо. Максимальное по включению независимое подмножество в X называется *базой*, или *базисным подмножеством* множества X.

Для $Y \subseteq X$ пусть $\mathrm{lin}Y$ есть подпространство, линейно порожденное множеством векторов Y (*натянутое на* множество Y). Размерность пространства $\mathrm{lin}Y$ называется *размерностью* множества Y и обозначается как $\mathrm{dim}Y$. Множество Y независимо тогда и только тогда, когда его размерность равна его мощности |Y|, т.е. когда $\mathrm{dim}Y = |Y|$.

Подмножество $Y \subseteq X$ называется *замкнутым*, если $Y = (\mathrm{lin}Y) \cap X$. Элементы (т.е. векторы) множества X называются *точками.* Размерность точки равен 1. Подмножество $Y \subset X$ называется *коточкой*, если оно замкнуто и $\mathrm{dim}Y = \mathrm{dim}X - 1$.

Векторы всех упомянутых ниже подмножеств $X \subseteq \mathbb{D}_n$ рассматриваются с точностью до знака. Это связано с тем, что значение имеют лишь пространства $\mathrm{lin}X$. С подмножеством $X \subseteq \mathbb{D}_n$ свяжем граф $G(X)$ следующим образом. Множество вершин этого графа есть N. Вектору $e_i + e_j \in X$ сопоставим ребро $(i,j)^+$ графа $G(X)$, которое, следуя [9] и [14], назовем *черным.* Вектору $e_i - e_j \in X$ сопоставим ребро $(i,j)^-$, которое назовем *красным.* Таким образом всему множеству $\mathbb{D}_n$ сопоставлен полный граф $G(\mathbb{D}_n)$ на множестве вершин N, где между любыми двумя вершинами $i, j \in N$ есть два параллельных ребра $(i,j)^+$ и $(i,j)^-$, черное и красное.

Для любого подграфа $G \subseteq G(\mathbb{D}_n)$ пусть $X(G) \subseteq \mathbb{D}_n$ есть множество векторов, соответствующих ребрам графа G. В частности, для ребра u графа G пусть $r(u)$ есть вектор, соответствующий этому ребру.

Напомню, что подмножество $X \subseteq \mathbb{D}_n$ называется *простым*, если множество X содержит не более одного вектора из каждой пары векторов $e_i \pm e_j$. Соответственно, граф G называется *простым*, если из каждой пары параллельных красного и черного ребер он содержит не более одного ребра. Таким образом, граф $G(X)$ простого множества X прост.

13.1 Циклы и независимые множества

Следующая лемма легко доказывается индукцией по числу векторов во множестве X.

Лемма 13 *Пусть $X \subset \mathbb{D}_n$ есть такое множество корней, что граф $G(X) = T$ есть простое дерево с множеством вершин $N_T \subseteq N$. Тогда множество X независимо. При этом существует разбиение $N_T = S_1 \cup S_2$, где $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, со следующим свойством.*

Если $(i,j)^-$ есть красное ребро T, то либо $i,j \in S_1$, либо $i,j \in S_2$. Если же $(i,j)^+$ есть черное ребро T, то либо $i \in S_1$ и $j \in S_2$, либо $i \in S_2$ и $j \in S_1$.

Из леммы 13 вытекает важное следствие.

Следствие 3 *В условиях леммы 13, пространство $LinX$ лежит в гиперплоскости H, ортогональной вектору $p = e(S_1) - e(S_2)$.*

Рассмотрим произвольную последовательность вершин $\{i_k : 1 \leq k \leq m\}$ полного графа $G(\mathbb{D}_n)$. Здесь не предполагается, что все вершины разные. Назовем *цепью* последовательность ребер $\{(i_k, i_{k+1})^{q_k} : 1 \leq k \leq m\}$, где $q_k \in \{\pm\}$ и $1 \leq k \leq m$. Так как последовательность вершин здесь произвольная, то одно и то же ребро может встречаться в этой цепи несколько раз. Назовем такую цепь *циклом*, если $i_1 = i_{m+1}$. Назовем такой цикл *тривиальным*, если $m = 2t \geq 4$, $i_{t+1+k} = i_{t+1-k}$ и $q_{t+k} = q_{t+1-k}$, где $0 \leq k \leq t$. Тривиальный цикл является последовательностью $t \geq 2$ пар идентичных ребер. Назовем цикл *четным*, если он не тривиален и содержит четное число черных ребер. Каждое ребро считается столько раз, сколько оно встречается при прохождении цепи. Таким образом, четный цикл содержит четное число черных ребер вида $(i_k, i_{k+1})^+$. Цикл, который не тривиален и содержит нечетное число черных ребер, назовем *нечетным*. Например, последовательность $(i,j)^-(j,i)^+$ есть нечетный цикл. А цикл $(i,j)^-(j,k)^-(k,j)^+(j,i)^+$ – четный.

Замечу, что в [14] граф $G(X)$, где $X \subseteq \mathbb{D}_n$, называется красным, если он содержит четное число черных ребер, т.е. число черных ребер равно 0 по модулю 2. Поэтому наши четный и нечетный циклы в статье [14] называются красным и черным циклом, соответственно. Утверждение следующей леммы 14 есть часть утверждения Предложения 6.3 статьи [14].

Лемма 14 *Пусть $X \subseteq \mathbb{D}_n$. Если граф $G(X)$ есть четный цикл, то множество X зависимо.*

Доказательство. Рассмотрим цепь $Ch_m = \{(i_k, i_{k+1})^{q_k} : 1 \leq k \leq m\}$. Напомню, что ребро $(i_k, i_{k+1})^{q_k}$ соответствует вектору $e_{i_k} + (-1)^{s_k} e_{i_{k+1}}$, где $s_k = 0$, если $q_k = +$, и $s_k = 1$, если $q_k = -$. Пусть s есть число черных ребер в цепи Ch_m. Нетрудно убедиться в справедливости следующих равенств

$$\sum_{1 \leq k \leq m} \Big(\prod_{1 \leq l \leq k-1} (-1)^{s_l+1}\Big)(e_{i_k} + (-1)^{s_k} e_{i_{k+1}}) = e_{i_1} - \prod_{1 \leq l \leq m} (-1)^{s_l+1} e_{i_{m+1}} = e_{i_1} - (-1)^s e_{i_{m+1}}.$$

Замечу, что в первой сумме вектор e_{i_k}, где $1 < k < m$, встречается дважды с разными знаками. Пусть $e_{i_1} = e_{i_{m+1}}$. Тогда цепь Ch_m есть цикл. В этом случае приведенная выше сумма равна нулю тогда и только тогда, когда s четно, т.е. когда этот цикл четный. Поэтому соответствующее ему множество векторов зависимо. $\square$

Лемма 15 *Пусть граф $G \subseteq G(\mathbb{D}_n)$ связен. Тогда граф G содержит четный цикл, если он содержит два нечетных цикла.*

Доказательство. Для $i = 1, 2$ пусть $C_i \subset G$ суть два нечетных цикла, содержащихся в графе G. Пусть N_i есть множество вершин цикла C_i. Рассмотрим два случая, зависящих от пересечения $N_1 \cap N_2$. Пусть $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Так как G связен, то существует цепь $\{(i_k, i_{k+1})^{q_k} : 1 \leq k \leq m\}$, где $m \geq 1$, такая, что $i_1 \in N_1$ и $i_{m+1} \in N_2$. Пусть C_3 есть тривиальный цикл, образованный прохождением этой цепи в прямом и обратном направлениях. Так как каждое ребро цикла C_3 встречается ровно два раза, то цикл C_3 –четный. Рассмотрим объединение $C = C_1 \cup C_1 \cup C_3$, рассматриваемое как объединение множеств вершин и ребер этих циклов. Нетрудно убедиться, что C есть четный цикл графа G.

Пусть теперь $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$ и $i \in N_1 \cap N_2$. Пусть $C_1 = \{(i_k, i_{k+1})^{q_k} : 1 \leq k \leq m\}$ и $C_2 = \{(i_k, i_{k+1})^{q_k} : m+1 \leq k \leq m+t\}$, где $i = i_1 = i_{m+1} = i_{m+1+t}$. Напомню, что эти циклы могут иметь и другие общие вершины. Нетрудно видеть, что их объединение $C = \{(i_k, i_{k+1})^{q_k} : 1 \leq k \leq m+t\}$ есть цикл, и он четный. □

Лемма 16 *Пусть $X \subseteq \mathbb{D}_n$ и $G = G(X)$. Тогда, если граф G имеет не более одного цикла и этот цикл нечетный, то множество X независимо.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть связный граф G. Пусть G не имеет циклов. Напомню, что параллельные красное и черное ребра образуют нечетный цикл. Поэтому граф G есть простое дерево. По Лемме 13 множество X независимо. Пусть теперь граф G имеет один нечетный цикл. Согласно определению, нечетный цикл имеет хотя бы одно черное ребро, скажем ребро $(i, j)^+$. Удалив из графа G это ребро, получим простое дерево T. По Лемме 13 множество N_T вершин дерева T разбивается на два подмножества S_1 и S_2. Если концевые вершины ребра $(i, j)^+$ принадлежали бы разным подмножествам S_1 и S_2, то это ребро замыкало бы в графе G четный цикл. Действительно, этот цикл замыкает цепь из ребер, идущую, скажем, из вершины $i \in S_1$ в вершину $j \in S_2$. А эта цепь проходит нечетное число черных ребер, имеющих концевые вершины в разных множествах S_1 и S_2. Поэтому обе вершины этого ребра принадлежат одному из этих подмножеств, скажем $i, j \in S_1$.

Напомню, что множество корней X порождает пространство $\mathrm{lin}X$. Согласно следствию 3, векторы, соответствующие ребрам дерева T, лежат в гиперплоскости H пространства $\mathrm{lin}X$, ортогональной вектору $p = e(S_1) - e(S_2)$. Вектор $e_i + e_j$ не ортогонален p. Поэтому он не лежит в гиперплоскости H. Следовательно множество X независимо. □

Следующее предложение 4 есть некоторое обобщение Леммы 6.4 из [14].

Предложение 4 *Пусть $X \subseteq \mathbb{D}_n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(а) Множество X независимо.

(б) Каждая компонента графа $G(X)$ имеет не более одного цикла, и этот цикл нечетный.

(в) Граф $G(X)$ не содержит четных циклов.

Доказательство. Импликация (а)⇒(в) следует из Леммы 14. Импликация (б)⇒(в) очевидна. Импликация (б)⇒(а) доказана в Лемме 16. Импликация (в)⇒(б) легко вытекает из Леммы 15. □

Так как в общем случае четный цикл может пересекаться с самим собой, то он может включать четные циклы меньшей мощности. Поэтому важны минимальные по включению четные циклы.

Напомню, что зависимое подмножество $X \subseteq \mathbb{D}_n$ называется М-циклом, если любое его подмножество независимо.

Предложение 4 имеет следующее очевидное, но важное следствие.

Следствие 4 *Пусть $X \subseteq \mathbb{D}_n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) Множество X является М-циклом.

(2) Граф $G(X)$ есть минимальный по включению четный цикл. □

Пусть G есть граф на множестве вершин N. Пусть $S \subset N$ есть такое подмножество, что $S \neq \emptyset, N$. Тогда *разрезом $Cut(S)$* графа G называется подмножество его ребер, имеющих один конец в множестве S , а другой конец в дополнительном множестве $N - S$, т.е.

$$Cut(S) = \{(i, j) : i \in S, j \in N - S\}.$$

Легко видеть, что любой цикл графа G имеет с любым разрезом четное число общих ребер.

Пусть теперь $G = G(X)$ для некоторого $X \subseteq \mathbb{D}_n$. Любой разрез графа $G(X)$ состоит из красных и черных ребер. Для $S \subset N$ рассмотрим отображение φ_S множества X в множество $X_S \subseteq \mathbb{D}_n$, соответствующее перемене цветов ребер разреза $Cut(S)$ графа $G(X)$. Таким образом векторы $e_i \pm e_j \in X$, соответствующие ребрам $(i, j)^{\pm}$ этого разреза, заменяются векторами $e_i \mp e_j \in X_S$, где знаки согласованы.

Предложение 5 *Отображение $\varphi_S : X \to X_S$ является изоморфизмом между семействами М-циклов в X и в X_S.*

Доказательство. Так как каждый цикл графа имеет четное общее число ребер с разрезом $Cut(S)$, то четность чисел красных и черных ребер в циклах множеств X и X_S одинакова. Поэтому отображение φ_S переводит каждый четный цикл в четный цикл. Следовательно отображение порождает изоморфизм между семействами М-циклов множеств X и X_S. □

13.2 Коточки

Напомню, что множество $X \subseteq \mathbb{D}_n$ называется *коточкой*, если X замкнуто и $\mathrm{lin}X$ есть гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, т.е. если размерность пространства $\mathrm{lin}X$ равна $n-1$. Пусть $X \subset \mathbf{D}_n$ есть коточка, и $q, q' \in X$. Тогда, очевидно, что $q \pm q' \in \mathrm{lin}X$. Если хотя бы один вектор из пары векторов $q \pm q'$, скажем вектор $q + q'$, принадлежит $\mathbb{D}_n$, то определение коточки влечет включение $q + q' \in X$.

Коточки X имеют следующее важное свойство. Они однозначно с точностью до скалярного множителя определяют свой нормальный вектор. Вектор $p \in \mathbb{R}_n$ называется *нормальным вектором* коточки X, если p ортогонален $\mathrm{lin}X$, т.е. если $\langle p, x \rangle = 0$ для всех

$x \in X$. Напомню, что векторы $x \in \mathbb{D}_n$ имеют вид $e_i \pm e_j$. Поэтому приведенные выше уравнения принимают вид
$$p_i \pm p_j = 0. \tag{31}$$

Так как размерность коточки равна $\dim(\mathrm{lin}X) = n - 1$, то система уравнений (31) определяет вектор p однозначно с точностью до скалярного множителя. Конечно решение системы (31) однозначно определяется уравнениями, соответствующими векторам любого базисного подмножества в X. Остальные уравнения являются следствием базисных. Это, кстати, есть матроидное свойство.

Пусть $N = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ есть разбиение множества N на три попарно не пересекающихся множества. Для $U \subseteq \mathbb{D}_n$ обозначим через $G_U(S_0)$ подграф графа $G(U)$, порожденный ребрами графа $G(U)$ с обоими концами в множестве S_0. Пусть $G_U(S_1, S_2)$ есть подграф графа $G(U)$, порожденный следующими ребрами графа $G(U)$: $(ij)^-$, где либо $i, j \in S_1$, либо $i, j \in S_2$, и $(ij)^+$, где либо $i \in S_1$, $j \in S_2$, либо $j \in S_1$, $i \in S_2$.

Теорема 2 *Пусть $U \subseteq \mathbb{D}_n$ есть некоторое подмножество полной размерности n. Рассмотрим разбиение $N = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ на три попарно не пересекающихся подмножества $S_i \subset N$, $i = 0, 1, 2$, где мощность $|S_0| \neq 1, n$. Это разбиение определяет коточку $X = X(S_0, S_1, S_2)$ множества U, если графы $G_U(S_0)$ и $G_U(S_1, S_2)$ связны, а граф $G_U(S_0)$ содержит нечетный цикл. Коточка $X(S_0, S_1, S_2)$ состоит из векторов множества U, принадлежащих следующему множеству:*

$$e_i \pm e_j \text{ для } i, j \in S_0; e_i + e_j \text{ для } i \in S_1, j \in S_2; e_i - e_j \text{ для } i, j \in S_1 \text{ и для } i, j \in S_2,$$

где $i \neq j$.

Нормальный вектор коточки $X(S_0, S_1, S_2)$ есть вектор $p = e(S_1) - e(S_2)$.

Доказательство. Пусть $X \subset U$ есть коточка. Пусть $Y \subseteq X$ есть некоторая база в X. Так как $\dim X = \dim U - 1 = n - 1$, то база Y получается из некоторой базы B множества U удалением одного вектора. Согласно Предложению 4, граф $G(B)$ есть дерево на n вершинах плюс одно ребро, замыкающее в этом дереве нечетный цикл. Поэтому $G(Y)$ либо есть простое дерево на n вершинах, либо состоит из двух компонент, одна из которых есть дерево, а другая – дерево с одним нечетным циклом.

Так как размерность пространства $\mathrm{lin}Y$ равна $n - 1$, то система уравнений (31) для всех $x \in Y$ имеет единственное с точностью до множителя решение $p(Y)$. Будем искать вектор $p(Y) = p$ в виде $p = \sum_{i \in N} p_i e_i$. Пусть (i, j) есть ребро графа $G(Y)$. Тогда система уравнений (31) имеет равенство $p_i = p_j$, если ребро (i, j) красное, и равенство $p_i = -p_j$, если это ребро черное. Если же присутствуют оба ребра $(i, j)^-$ и $(i, j)^+$, то система (31) имеет оба эти уравнения, которые дают $p_i = p_j = 0$.

Если $G(Y)$ есть дерево на множестве вершин N, то, согласно Лемме 13, имеется разбиение $N = S_1 \cup S_2$ с описанными в этой лемме свойствами. Нетрудно видеть, что в этом случае вектор $p(Y)$ с точностью до знака имеет вид $p(Y) = e(S_1) - e(S_2)$.

Если $G(Y)$ состоит из двух компонент, то пусть $S_0 \subset N$ есть множество вершин компоненты с нечетным циклом. Тогда $|S_0| > 1$. Кроме того $|S_0| \neq n$, так как S_0 есть множество вершин одной из двух непустых компонент. По Лемме 13 множество вершин второй компоненты, являющейся деревом, разбито на два подмножества S_1 и S_2. Так как первая компонента содержит нечетный цикл, то система (31) имеет решение $p_i = 0$ для $i \in S_0$. Как и выше, вторая компонента дает $p(Y) = e(S_1) - e(S_2)$. $\square$

Следует отметить особый случай в Теореме 2, когда $S_0 = N - \{i\}$. В этом случае либо $S_1 = \{i\}$, $S_2 = \emptyset$, либо $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{i\}$, и простое дерево второй компоненты состоит из одной вершины. Нормальный вектор такой коточки есть e_i.

Так как нормальные векторы определены с точностью до скалярного множителя, то будем считать, что если $S_0 = \emptyset$, то нормальный вектор есть $q(S) = \frac{1}{2}(e(S) - e(\overline{S}))$, где $S = S_1$ и $N - S = \overline{S} = S_2$. Кроме того, если $S_0 \neq \emptyset$, то $e(S_1) - e(S_2) = p(S_1, T)$, где $T = S_1 \cup S_2$.

Нетрудно понять, что для $X = \mathbb{D}_n$ Теорема 2 имеет в качестве следствия следующий важный факт.

Следствие 5 *Множество нормальных векторов коточек n-мерных подмножеств множества $\mathbb{D}_n$, взятых с точностью до скалярных множителей, совпадает с множеством векторов $\mathcal{P}_D(n)$, определенным в (16).*

14 Унимодулярные подмножества в $\mathbb{D}_n$

Множество векторов U называется *унимодулярным*, если его векторы имеют целочисленное разложение по векторам любого его базисного подмножества $B \subseteq U$.

Напомню, что среди четных циклов существуют циклы, состоящие из двух не пересекающихся нечетных циклов, соединенных цепью из нескольких ребер. Назовем такой цикл *плохим*. Не плохие четные циклы назовем *хорошими*. Название плохих четных циклов оправдывается следующей теоремой 3.

Теорема 3 *Для подмножества $U \subseteq \mathbb{D}_n$ следующие условия эквивалентны:*

(а) множество U унимодулярно;

(б) граф $G(U)$ не содержит плохих четных циклов, т.е. не содержит непересекающихся по вершинам двух нечетных циклов.

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б). Предположим, что $G(U)$ содержит плохой четный цикл. Пусть цепь, соединяющая два его нечетных цикла, имеет вершины i и k в качестве концевых. В Лемме 14 было показано, что сумма векторов, соответствующих ребрам цепи, начинающейся в вершине i и кончающейся в вершине j, равна $e_i - (-1)^s e_j$, где s есть число красных ребер в этой цепи. Поэтому, если $i = j$ есть вершина первого цикла и s нечетно, то эта сумма вдоль первого цикла равна $2e_i$. Аналогично, второй нечетный цикл дает сумму $2e_k$ для $k \neq i$. Для того, чтобы четный цикл давал зависимость, т.е. чтобы сумма векторов по всему плохому циклу была равна нулю, необходимо, чтобы векторы, соответствующие ребрам цепи, соединяющей нечетные циклы, имели в этой зависимости коэффициенты ± 2. Поэтому любой из этих векторов разлагается не целочисленно через другие векторы этого цикла. Иными словами, множество векторов, соответствующих ребрам плохого четного цикла, не является унимодулярным. Отсюда вытекает, что граф $G(U)$ любого унимодулярного подмножества $U \subset \mathbb{D}_n$ не может содержать плохие четные циклы.

(б)$\Rightarrow$(а). Покажем, что при выполнении условия (б) любой вектор имеет целые координаты в любом базисе множества U. Пусть $B \subseteq U$ есть базисное подмножество и $u \in U - B$. Тогда объединение $\{u\} \cup B$ содержит четный цикл C, который по предположению хороший. Используя результат Леммы 14, нетрудно видеть, что вектор u представляется в виде линейной комбинации других векторов цикла C с коэффициентами ± 1. Так как база $B \subseteq U$ и вектор u произвольны, то это означает, что множество U унимодулярно. $\square$

Теорема 3, наверное, впервые была доказана в трудно доступной диссертации Лёша [12]. Следует отметить, что в [12] графы $G(U)$, соответствующие унимодулярным множествам U, называются *регулярными* двухцветными графами, а нечетный цикл называется *циклом индекса 2*.

Теорема 3 есть обобщение и переформулировка Леммы 6.5 из статьи [14]. Обобщение состоит в том, что множество U не обязательно имеет полную размерность n и не обязательно содержит четный цикл. Напомню, что в [14] четный цикл называется *красным*, а нечетный цикл – *черным*.

Так как частным случаем нечетного цикла является двухцветное (двойное) ребро, то теорема 3 имеет следующее следствие.

Следствие 6 *Если $U \subset \mathbb{D}_n$ есть унимодулярное множество, то граф $G(U)$ не содержит двух двухцветных ребер, не пересекающихся по вершинам.*

Из следствия 6 вытекает важный и полезный факт (см. также предложение 4.8 в [14]).

Предложение 6 *Если для унимодулярного множества U граф $G(U)$ содержит двухцветные ребра, то $G(U)$ имеет подграф, образованный в нем двухцветными ребрами, только одного из двух следующих типов:*

(а) звезда, где все двухцветные ребра инцидентны общей одной вершине;

(б) треугольник, состоящий из трех попарно смежных ребер. $\square$

Если $n \leq 3$, то само множество $\mathbb{D}_n$ является унимодулярным.

При $n = 2$ множество $\mathbb{D}_2$ состоит, с точностью до знаков из пары ортогональных векторов $e_i \pm e_j$, являясь базисом пространства $\mathbb{R}^2$.

Пусть $N_3 = \{ijk\}$. Тогда множество корней $\mathbb{D}_3 = \{\pm e_i \pm e_j, \pm e_i \pm e_k, \pm e_j \pm e_k\}$ изоморфно множеству корней $\mathbb{A}_3 = \{\pm e_i, \pm e_, \pm e_k, \pm(e_i - e_j), \pm(e_i - e_k), \pm(e_j - e_k)\}$. Этот изоморфизм дается соответствиями

$$\pm(e_i - e_j) \Leftrightarrow \pm(e_i - e_j),\ \{ij\} \subset N_3,\ \ \pm(e_i + e_j) \leftrightarrow \pm e_k,\ \{ijk\} = N_3.$$

Граф $G(\mathbb{D}_3)$ есть двухцветный треугольник, который не имеет плохих четных циклов.

Легко видеть, что, согласно Теореме 3, для любого k, где $1 \leq k \leq n$, следующее подмножество векторов

$$U_k^n = \mathbb{A}_{n-1} \cup \{e_k + e_j, j \in N - \{k\}\},\ \text{где } \mathbb{A}_{n-1} = \{e_i - e_j, i, j \in N\}, \tag{32}$$

является унимодулярным. Оно состоит из $\frac{n(n-1)}{2}+n-1=\frac{1}{2}n(n+1)-1$ векторов и изоморфно системе корней $\mathbb{A}_n$ без одного вектора. Этот изоморфизм дается соответствием $e_k+e_i \Leftrightarrow e_i$ для всех $i \in N-\{k\}$ и $e_i-e_j \Leftrightarrow e_i-e_j$ для всех $i,j \in N$, где $i \neq j$.

Если $n \geq 4$, то множество U_k^n является максимальным по включению и по мощности графическим унимодулярным подмножеством в $\mathbb{D}_n$.

Граф $G(U_k^n)$ есть полный граф K_n, в котором вершине $k \in N$ инцидентно $n-1$ ребер обоих цветов, а остальные ребра красные. Согласно предложению 5, перекраска ребер любого разреза дает изоморфное унимодулярное множество, состоящее из других векторов $r \in \mathbb{D}_n$. Семейство подмножеств $S \subseteq N$ таких, что $S \ni \{k\}$, определяет различные разрезы графа $G(U_k^n)$, а следовательно и различные его раскраски. Так как число таких подмножеств S равно 2^{n-1}, то число унимодулярных множеств изоморфных множеству U_k^n равно $n2^{n-1}$, где множитель n соответствует n выборам вершины $k \in N$, и учтена исходная раскраска, соответствующая множеству $S=N$.

В заметке [18] С.С.Рышковым дано следующее описание множества $U_k^n \subseteq \mathbb{D}_n$ как специального подмножества ребер ортаэдра $\mathbb{O}_n$. Замечу, что ребра ортаэдра $\mathbb{O}_n=\mathbb{O}_n(\frac{1}{2})$, определенного в разделах 4 и 5, параллельны и равны по величине корням системы $\mathbb{D}_n$. Причем каждому корню $r \in \mathbb{D}_n$ параллельны два противоположных в $\mathbb{O}_n$ ребра ортаэдра. Пусть $\mathbb{S}_{n-1}$ есть $(n-1)$-мерный симплекс, являющийся выпуклой оболочкой концевых точек векторов e_i для всех $i \in N$. Тогда симплекс $\mathbb{S}_{n-1}$ есть фасета $F(N)$ ортаэдра $\mathbb{O}_n$, ортогональная вектору $q(N)$. Каждое из ее $\frac{1}{2}n(n-1)$ ребер параллельно корню системы корней $\mathbb{A}_{n-1} \subseteq \mathbb{D}_n$. Очевидно, что ребра ортаэдра $\mathbb{O}_n$, инцидентные концевой вершине вектора e_k, параллельны корням $e_k \pm e_j$ для всех $j \in N-\{k\}$. Каждая фасета ортаэдра $\mathbb{O}_n$ имеет вид $F(S)=\mathrm{conv}(\{e_i : i \in S\} \cup \{-e_i : i \in N-S\})$. Поэтому она однозначно определяется одним из 2^n подмножеств S, $\emptyset \subseteq S \subseteq N$. При этом дополнительные множества S и $N-S$ определяют противоположные фасеты, ребра которых параллельны одному подмножеству корней. Пусть $k \in S \subseteq N$. Рассмотрим фасету $F(S)$ и ее вершину e_k. Тогда ребра фасеты $F(N)$, которые параллельны векторам e_i-e_j, и ребра, параллельные векторам e_i+e_k для всех $i \in N-\{k\}$, определяют унимодулярное множество U_k^n.

Так как все вершины и все фасеты $\mathbb{O}_n$ эквивалентны между собой по группе симметрии ортаэдра $\mathbb{O}_n$, то каждая пара, состоящая из фасеты и ее вершины, определяет унимодулярное множество U изоморфное U_k^n. При этом противоположные пары вершина-фасета определяют одно и то же множество. Поэтому при фиксированном k различные множества U_k^n определяются 2^{n-1} фасетами $F(S)$, где $k \in S$, содержащими фиксированную вершину $k \in N$. Отсюда вытекает, что число множеств $U \subset \mathbb{D}_n$, изоморфных унимодулярному множеству U_k^n, равно $n2^{n-1}$.

В работе [17] показано, что одной из максимальных n-мерных унимодулярных систем является система $\mathbf{W}_n$, представляющая кографический матроид $\mathcal{R}^*(Q_k)$ кубического графа Q_k на $2k$ вершинах, где $k=n-1$. Для некоторого упорядочивания множества $N=\{1,2,...,n\}$ пусть v_i, $1 \leq i \leq 2k$, суть последовательные вершины цикла длины $2k$. Кроме $2k$ ребер (v_i,v_{i+1}), $1 \leq i \leq 2k$, граф Q_k имеет еще k ребер-диагоналей цикла (v_i,v_{i+k}), где $1 \leq i \leq k$. Следующее множество корней

$$U(Q_k)=\{e_n \pm e_i,\ i \in N-\{n\},\ e_1+e_{n-1},\ e_i-e_{i+1},\ \text{где } 1 \leq i \leq n-2,\} \subseteq \mathbb{D}_n$$

является унимодулярным. Из этого представления видно, что граф $G(U)$ для $U = U(Q_k)$ есть цикл на множестве вершин $N - \{n\}$, каждая вершина которого смежна с вершиной $\{n\}$ красным и черным ребрами. Сам цикл состоит из одного черного ребра и $n-2$ красных ребер.

Соответствие между ребрами графа Q_k и векторами системы $U(Q_k)$ следующее (напомню, что $k = n-1$):

$$r(v_i, v_{i+1}) = e_n + e_i,\ r(v_{k+i}, v_{k+i+1}) = e_n - e_i,\ 1 \le i \le k,$$

$$r(v_i, v_{i+k}) = e_{i-1} - e_i,\ 2 \le i \le k,\ r(v_1, v_{k+1}) = e_1 + e_k.$$

Здесь и выше $v_{2k+1} = v_1$.

Напомню, что подмножество $U \subset \mathbb{D}_n$ называется простым, если оно содержит не более одного вектора из двух векторов $e_i \pm e_j$ для любой пары индексов $i, j \in N$. Очевидно, что максимальное простое подмножество содержит $\frac{1}{2}n(n-1)$ векторов. Нетрудно видеть, что если $n \le 5$, то граф любого простого множества не содержит плохих четных циклов. Поэтому из Теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 7 *Любое простое множество $U \subset \mathbb{D}_n$, простой граф $G(U)$ которого имеет не более 5 вершин, унимодулярно.* $\square$

В частности, если граф $G(U)$ прост, имеет 5 вершин и все его ребра черные, то U есть знаменитое пятимерное унимодулярное множество, которое не графическое и не кографическое. Оно обозначено $\mathbf{E}_5$ в статье [17]. Там же можно найти подробности.

15 L-области, содержащие форму ДВ-ячейки $P(D_n^*)$

В разделе 12 мы видели, что при четном $n = 2m$ ДВ-ячейка $P(D_{2m}^*)$ является коренным параллелоэдром.

При нечетном $n = 2m+1$ L-область $\Delta(D_n^*)$ ДВ-ячейки $P(D_n^*)$ есть n-мерный конус. Крайние лучи этого конуса натянуты на n форм f_0^l и n форм f_2^l для всех $l \in N$, где $f_t^l = f_\gamma(p)$ для $\gamma = \gamma_t^l$ и $f_\gamma(p) = \sum_{i\in N} \gamma_i p_i^2$. Формы f_0^l для всех $l \in N$ суть формы ДВ-ячеек $P(D_{n-1}^*)$, лежащих в пространствах с координатами x_i для всех $i \in N - \{l\}$. Область $\Delta(D_n^*)$ состоит из форм $f_\gamma(p) = \sum_{i\in N} \gamma_i p_i^2$ для всех $\gamma \in \mathcal{G}_{2m+1}$ (см раздел 12).

Множество нормальных векторов параллелоэдров $P_n(\gamma)$, где $\gamma \in \mathcal{G}_{2m+1}$, есть множество (см. (15))

$$\mathcal{P}_0(n) = \{\pm e_i,\ \text{для всех } i \in N;\ \text{и } q(S) = \frac{1}{2}(e(S) - e(\overline{S})) \text{ для всех } S \subseteq N\}.$$

Полярное ему множество $\mathcal{P}_0^*(n)$ (см. теорему 1) есть множество корней $\mathbb{D}_n$. Поэтому, согласно теореме 1, сумма $P_n(\gamma) + b_r z(r)$ есть параллелоэдр Вороного $P(f_\gamma + b_r a_r)$ для любого $r \in \mathbb{D}_n$, где $a_r(p) = \langle r, p\rangle^2$.

Если $r = e_i - e_j$ или $r = e_i + e_j$, то эти векторы принадлежат сложному классу четности $C(\{ij\})$ минимальных относительно формы f_γ векторов. Если $m \ge 2$ и $\gamma \in \mathcal{G}_{2m+1}$, то эти векторы (с точностью до знака) суть единственные векторы класса $C(\{ij\})$, т.е. $C(\{ij\}) = Q_2(\{ij\})$, где $Q_2(\{ij\}) = \{\pm e_i \pm e_j\}$.

Так как множество $Q_2(\{ij\})$ содержит четыре вектора, то каждая из четырех контактных граней $G(\pm e_i \pm e_j)$ имеет размерность $n-2$. Поэтому эти четыре грани порождают 4-поясок. Четыре фасеты этого 4-пояска суть четыре контактные грани $G(\pm e_i)$, $G(\pm e_j)$.

Для $r = e_i - e_j$ в сумме $P_n(\gamma) + b_r z(r)$ грани $G(\pm(e_i + e_j))$ превращаются в фасеты $G(\pm(e_i+e_j))+z(e_i-e_j)$, а соответствующий 4-поясок превращается в 6-поясок с нормальными векторами $\pm e_i, \pm e_j$ и $\pm(e_i + e_j)$. Поэтому множество $\mathcal{P}_0(n)$ расширяется векторами $\pm(e_i+e_j)$, а из множества $\mathcal{P}_0^*(n)$ эти векторы удаляются. Следовательно отрезок $z(e_i+e_j)$ не может быть прибавлен к параллелоэдру $P(D_n^*)+z(e_i-e_j)$. Наглядно это проявляется в том, что в сумме $P(D_n^*)+z(e_i-e_j)+z(e_i+e_j)$ этот 6-поясок превращается в 8-поясок. Таким образом последняя сумма не является параллелоэдром. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 17 *Пусть $\gamma \in \mathcal{G}_{2m+1}$. Тогда, если многогранник $P_{2m+1}(\gamma) + Z_b(U)$ есть параллелоэдр, то унимодулярное множество U простое.*

Здесь $Z_b(U) = \sum_{u\in U} b_u z(u)$ есть зонотоп. Напомню, что множество $U \subset \mathbb{D}_n$ называется *простым*, если из двух корней $e_i \pm e_j$ оно содержит не более одного. Итерируя рассмотрения абзаца перед леммой 17, получаем следующее утверждение.

Предложение 8 *Пусть $n = 2m+1$ нечетно и $U \subset \mathbb{D}_n$ есть простое унимодулярное множество, содержащее $\frac{n(n-1)}{2} = m(2m+1)$ векторов. Тогда оно определяет общую L-область $\Delta(U)$, состоящую из следующих форм:*

$$f = \sum_{k\in N}(\mu_k f_0^k + \nu_k f_2^k) + f_U,$$

где $\mu_k, \nu_k \geq 0$ для всех $k \in N$, и $f_U(p) = \sum_{r\in U} b_r \langle r, p\rangle^2$.

Если $U = \mathbb{A}_{2m} \subseteq \mathbb{D}_{2m+1}$, то $\Delta(U)$ есть область Δ_2, описанная Барнсом и Тренери в [6]. Формы f_0^k и f_2^k обозначены в [6] через χ_k и ω_k, соответственно.

16 L-область Δ_k

В этом разделе я подробно опишу формы и параллелоэдры L-области Δ_k, грань которой размерности $\frac{1}{2}n(n+1)-1$ есть стенка между первой и второй совершенными областями. Эта область рассмотрена Вороным в §§ 105–110 его мемуара [2]. С.С.Рышков называет параллелоэдры L-области Δ_k параллелоэдрами II-типа (см. [5], [9], [18]).

Формы вида $\sum_{r\in U_k^n} b_r\langle r, x\rangle^2$ принадлежат грани размерности $\frac{1}{2}n(n+1)-1$ второй совершенной области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$, которая одновременно является фасетой L-области Δ_k и фасетой первой совершенной области. В работе [9] эта фасета обозначается H_ν, $1 \leq \nu \leq n2^{n-2}$. Здесь $n2^{n-2}$ есть число различных унимодулярных подмножеств в $\mathbb{D}_n$, изоморфных U_k^n.

Вороной нашел, что L-область Δ_k симплициальна, т.е. она есть выпуклая оболочка стенки, натянутой на формы $f_r(x)$ для $r \in U_k^n$, и один экстремальный луч, форму которого он обозначил через ω. Вороной шел из первой (главной) области во вторую. Поэтому он получил эту форму в виде $\omega(x) = \sum_{r\in\mathbb{A}_n} b_r f_r(x)$. Она имеет вид (см. стр.353 русского перевода [1])

$$\omega(x) = (n-2)(x_1^2 + x_2^2) + 2\sum_{i=3}^{n} x_i^2 + 2x_1x_2 - 2(x_1+x_2)\sum_{i=3}^{n} x_i.$$

В случае $n = 5$ соответствующая форме ω решетка обозначена в [20] через L_2. Она была найдена П.Энгелем с помощью компьютера и приведена в [15] под номером 42.96.

Ее матрица Грама $A = (a_{ij})$ имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} n-2 & 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ 1 & n-2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Если обозначить базисные векторы, соответствующие этой матрице, через q_1, q_2, r_i, где $3 \le i \le n$, то получим следующие скалярные произведения этих векторов:

$$q_1^2 = q_2^2 = n-2,\ \langle q_1, q_2\rangle = 1,\ r_i^2 = 2,\ \langle r_i, r_j\rangle = 0,\quad i \ne j, \langle q_1, r_i\rangle = \langle q_2, r_i\rangle = -1,\ 3 \le i, j \le n.$$

Пусть

$$r_2 = -(q_1 + q_2 + \sum_{i=1}^{3} r_i).$$

Нетрудно проверить, что

$$r_2^2 = 2,\ \langle r_2, r_i\rangle = 0,\ 3 \le i \le n,\ \text{и}\ \langle r_2, q_1\rangle = \langle r_2, q_2\rangle = -1.$$

Поэтому естественно заменить в исходном базисе вектор q_2 на r_2, а у вектора q_1 опустить индекс 1, т.е. положить $q_1 = q$. Кроме того, помня, что индекс области Δ_k есть k, будем считать, что индексы векторов r_i принадлежат множеству $N - \{k\}$. Удобно также ввести обозначение $\sum_{i\in S} r_i = r(S)$. В новом базисе форма ω принимает вид

$$\omega(x) = (n-2)x_k^2 + 2\sum_{i\in N-\{k\}} x_i^2 - 2x_k \sum_{i\in N-\{k\}} x_i.$$

Положим $r_k = 2q + \sum_{i\in N-\{k\}} r_i$. Норма вектора r_k равна $2(n-3)$. Легко видеть, что $\langle r_k, r_i\rangle = 0$ для всех $i \in N - \{k\}$, т.е. множество $\{r_i : i \in N\}$ состоит из n попарно ортогональных векторов. Поэтому возьмем множество $\mathcal{E}^n = \{\frac{1}{\sqrt{2}} r_i : i \in N\}$ в качестве базиса пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда $q = \frac{1}{2}(r_k - r(N - \{k\})) = r_k - \frac{1}{2} r(N)$. Положим $q_S =$

$q + r(S) = r(S \cup \{k\}) - \frac{1}{2}r(N)$. Базис $\mathcal{E}^n$ порождает решетку D_n^*. Векторы $\frac{1}{\sqrt{2}}q_S$, где $\emptyset \subseteq S \subseteq N - \{k\}$, это векторы $q(S \cup \{k\})$ множества $\mathcal{P}_0(n)$. Напомню, что $-q(S \cup \{k\}) = q(N - \{k\} - S)$. В базисе $\mathcal{E}^n$ форма ω принимает вид

$$\omega(x) = (n-3)x_k^2 + \sum_{i \in N - \{k\}} x_i^2,$$

т.е. вид формы f_t^k, где $t = n - 3$ и $\beta = 1$, рассмотренной в разделе "Степень нежесткости параллелоэдра $P_n(\gamma)$".

Пусть $U_{n,k} \subset \mathbb{D}_n$ есть унимодулярное множество, изоморфное множеству U_k^n. Оно получается из U_k^n перекрашиванием красных ребер в черные некоторого разреза $(S, N - S)$, $S \subset N$, двухцветного графа $G(U_k^n)$.

Предложение 9 *Сумма $P(b_0 f_{n-3}^k) + Z_b(U)$ есть параллелоэдр Вороного $P(b_0 f_{n-3}^k + f_U)$, где $b_r \geq 0$ и $f_U(p) = \sum_{r \in U} b_r \langle r, p \rangle^2$, для любого подмножества $U \subseteq U_{n,k}$.*

Доказательство. Множество нормальных векторов параллелоэдра $P(f_{n-3}^k)$ есть $\mathcal{P}_0(n)$ (см. (15)). Так как $\mathcal{P}_0^*(n) = \mathbb{D}_n$, то, по тереме 1, сумма $P(b_0 f_{n-3}^k) + b_r z(r)$ есть параллелоэдр Вороного $P(b_0 f_{n-3}^k + b_r a_r)$, где $a_r(p) = \langle r, p \rangle^2$ и $r \in \mathbb{D}_n$.

Если $r = e_i - e_j$ или $e_i + e_j$, где $i, j \neq k$, то класс четности $C(\{ij\})$ содержит с точностью до знака только эти векторы. Поэтому применимы рассуждения предыдущего раздела, так как любое подмножество $U \subset U_{n,k}$, не содержащее корней вида $r = e_k \pm e_j$, простое, то $P(b_0 f_{n-3}^k) + Z_b(U) = P(b_0 f_{n-3}^k + f_U)$.

Корни $r = e_k - e_i$ или $e_k + e_i$, где $i \in N - \{k\}$, принадлежат сложному классу четности $C(\{ik\}$, содержащему кроме этих векторов также и векторы $p(T_i, S)$, где $T_i = N - \{i, k\}$. Поэтому контактная грань, соответствующая классу $C(\{ik\})$ не становится фасетой суммы $P(b_0 f_{n-3}^k) + b_r z(r)$ для каждого из этих корней. Следовательно сумма с отрезками обоих корней есть параллелоэдр Вороного. И это верно для всех $i \in N - \{k\}$. Отсюда вытекает утверждение этого предложения. $\square$

Из предложения 9 вытекает, что формы области Δ_k суть формы $b_0 f_{n-3}^k + f_U$ для всех подмножеств $U \subseteq U_k^n$.

Предложение 9 эквивалентно утверждению второго абзаца формулировки Теоремы 1 статьи С.С.Рышкова [18]. Эта теорема приведена там без доказательства. Кроме того, в первом абзаце формулировки этой Теоремы 1 слова "для любого $n \geq 4$" нужно заменить на "для любого четного $n \geq 4$".

17 Вторая совершенная область в размерности $n = 4$

Так как множества корней $\mathbb{A}_3$ и $\mathbb{D}_3$ изоморфны, то вторая совершенная область в размерности $n = 3$ изоморфна первой совершенной области в той же размерности.

Вторая совершенная область $\mathcal{F}(\mathbb{D}_4)$ в размерности 4 обладает следующим замечательным свойством. Как было замечено в разделе 7, любая форма f_b второй совершенной области может быть представлена в виде $f_b = f_\gamma + f_U$, где $f_\gamma(x) = \sum_{i \in N} \gamma_i x_i^2$ и $f_U(x) = \sum_{r \in U} b_r \langle r, x \rangle^2$. Но в общем случае отсюда не вытекает, что $P(f_b) = P(f_\gamma) + P(f_U)$.

В случае же $n = |N_4| = 4$ такое единое представление существует для всех форм второй совершенной области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_4)$. Более того, в этом представлении $\gamma_i = b_0$ для всех $i \in N_4$ и U есть унимодулярное множество. Итак для любой формы $f_b \in \mathcal{F}(\mathbb{D}_4)$ существует однозначное ее представление в виде

$$f_b(x) = b_0 x^2 + \sum_{r \in U} b_r \langle r, x \rangle^2,$$

где $U \subset \mathbb{D}_n$ есть унимодулярное подмножество. Форма $f_0(x) = \frac{1}{2}x^2$ лежит на центральном луче области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_4)$ и является формой решетки D_4^*, которая двойственна корневой решетке D_4. Обе эти решетки изоморфны друг другу. Параллелоэдр $P(f_0) = P(D_4^*)$ есть ДВ-ячейка решетки D_4^*. Форма $\sum_{r \in U} b_r \langle r, u \rangle^2$ определяет зонотоп $Z_b(U)$. Представление формы $f_b(x)$ в виде суммы этих форм отражает тот факт, что параллелоэдры $P(f_b)$ для $f_b \in \mathcal{F}(D_4)$ являются суммами Минковского $b_0 P(D_4^*) + Z_b(U)$.

Система корней $\mathbb{D}_4$ содержит, с точностью до знаков, 12 корней $e_i \pm e_j$, где $i, j \in N_4 = \{ijkl\}$. Множество $\mathbb{D}_4$ является объединением трех базисов пространства $\mathbb{R}^4$. Эти три базиса, с точностью до знаков векторов, суть следующие три множества:

$$B_1 = \{e_i \pm e_j, e_k \pm e_l\},\ B_2 = \{e_i \pm e_k\, e_j \pm e_l\},\ B_3 = \{e_i \pm e_l, e_j \pm e_k\}.$$

Эти три множества порождаются тремя разбиениями множества N_4 на пары: $\{ij, kl\}$, $\{ik, jl\}$, $\{il, jk\}$. Таким образом, имеем разложение

$$\mathbb{D}_4 = \cup_{m=1}^3 B_m$$

множества корней на три непересекающихся подмножеств B_m.

Замечу, что $\langle e_i + e_j, x \rangle^2 + \langle e_i - e_j, x \rangle^2 = 2(x_i^2 + x_j^2)$. Поэтому, для $m = 1, 2, 3$ имеем

$$\sum_{r \in B_m} \langle r, x \rangle^2 = 2 \sum_{s \in N_4} x_s^2 = 2x^2,$$

и

$$\sum_{m=1}^3 b_m \sum_{r \in B_m} \langle r, x \rangle^2 = 2(b_1 + b_2 + b_3)x^2.$$

Рассмотрим произвольную квадратичную форму $f_{b'} \in \mathcal{F}(\mathbb{D}_4)$, т.е. форму

$$f_{b'}(x) = \sum_{r \in \mathbb{D}_4} b'_r \langle r, x \rangle^2 = \sum_{m=1}^3 \sum_{r \in B_m} b'_r \langle r, x \rangle^2.$$

Пусть $b_m = \min_{r \in B_m} b'_r$. Тогда имеем $\sum_{r \in B_m} b'_r \langle r, x \rangle^2 = 2b_m x^2 + \sum_{r \in B_m} (b'_r - b_m)\langle r, x \rangle^2$. Поэтому

$$f_{b'}(x) = 2(b_1 + b_2 + b_3)x^2 + \sum_{m=1}^3 \sum_{r \in B_m} (b'_r - b_m)\langle r, x \rangle^2 = b_0 x^2 + \sum_{r \in U_b} b_r \langle r, x \rangle^2,$$

где $b_0 = 2(b_1 + b_2 + b_3)$, $b_r = b'_r - b_m$ для $r \in B_m$ и $U_b \subset \mathbb{D}_4$ есть носитель функции весов $b : \mathbb{D}_4 \to \mathbb{R}_+$. Пусть $r_m = \mathrm{argmin}_{r \in B_m} b'_r$. Тогда $b_{r_m} = 0$, и. следовательно,

$$|U_b \cap B_m| \leq 3 \text{ для всех } m = 1, 2, 3.$$

Поэтому подмножество U_b содержит, с точностью до знаков, не более 9=12-3 корней.

Замечу, что для каждого m граф $G(B_m)$ состоит из двух несмежных двухцветных ребер. Так как $G(\mathbb{D}_4) = \cup_{m=1}^3 G(B_m)$, то из выше сказанного вытекает, что граф $G(U_b)$ не имеет двух несмежных двухцветных ребер. По следствию 6 множество U_b унимодулярно. Ниже я доказываю это явно.

В случае $n = 4$ существуют только 2 класса изоморфизма максимальных унимодулярных множеств $U_b \subset \mathbb{D}_4$. Представителями этих классов являются унимодулярные множества U_k^4 и $\mathbf{W}_4$, каждое содержащее 9 векторов. Они получаются из $\mathbb{D}_4$ удалением трех корней по одному из каждого B_m. С точностью до изоморфизма существует два вида троек корней: тройки, являющиеся либо независимым множеством, либо циклом. Назовем их *звезда* и *треугольник*, соответственно.

Так как каждая тройка получается выбором одного из четырех векторов каждого множества B_m, то имеется $4^3 = 64$ троек. Это значит, что совершенная область разбивается на 64 L-области. Из них 16 и 48 областей имеют фасеты, являющиеся теми фасетами совершенной области, которые определяются унимодулярными множествами типа U_4^k и $\mathbf{W}_4$, соответственно.

Напомню, что $G(\mathbb{D}_4)$ есть полный двухцветный граф на 4 вершинах. Множества U_k^n и $\mathbf{W}_4$ получаются, например, удалением звезды $\{e_i + e_j, e_j + e_l, e_i + e_l\}$ и треугольника $\{e_i - e_j, e_j + e_l, e_i + e_l\}$, соответственно.

Согласно разделу 9 (см. (15)), множество нормальных векторов ДВ-ячейки $P(D_4^*)$ есть

$$\mathcal{P}_0(4) = \{\pm e_i, \ \pm q(i), \ i \in N_4, \ q(ij), \ \{ij\} \subset N_4\}.$$

Множество контактных векторов этой ДВ-ячейки есть объединение трех классов четности B_m, $1 \leq m \leq 3$. Это объединение есть система корней $\mathbb{D}_4$.

Нетрудно убедиться, что множество $\sqrt{2}\mathcal{P}_0(4)$ есть представление семейства корней $\mathbb{D}_4$. Отсюда вытекает, что параллелоэдр $\sqrt{2}\{x \in \mathbb{R}^4 : \langle p, x\rangle \leq p^2, \ p \in \mathcal{P}_0(4)\}$ есть ДВ-ячейка $P(D_4)$ корневой решетки D_4. Хорошо известно, что $P(D_4) \cong P(D_4^*)$ есть самодвойственный правильный 4-мерный многогранник. Он называется *24-ячейка*, так как имеет 24 фасеты (и, по двойственности, 24 вершины).

Так как размерность классов четности B_m равна 4, то соответствующие контактные грани суть вершины. Так как $p^2 = 1$ для всех $p \in \mathcal{P}_0(4)$, то 24 вершины параллелоэдра $P(D_4^*)$ суть концевые точки $v(r)$ 24 корней $r \in \mathbb{D}_4 = \cup_m B_m$.

В соответствии с теоремой 1, в сумме $P(D_4^*) + b_1 z(r_1)$ для любого $r_1 \in B_m$ контактные вершины $v(r')$ для $r' \in B_m - \{r_1\}$ превращаются в контактные ребра $e(r')$. Если $r_2 \in B_m - \{r_1\}$, то в сумме $P(D_4^*) + b_1 z(r_1) + b_1 z(r_2)$ контактные ребра $e(r'')$ превращаются в контактные грани $g(r'')$ для $r'' \in B_m - \{r_1, r_2\}$. И наконец, для $r_3 \in B_m - \{r_1, r_2\}$ в сумме $P(D_4^*) + \sum_{i=1}^3 b_i z(r_i)$ контактная грань $g(r'')$ превращается в фасету с нормальным вектором r''. Таким образом множество нормальных векторов расширяется вектором r'', а множество $(\mathcal{P}_0(4) \cup \{r''\})^*$ уменьшается на этот вектор. Это значит, что мы не можем прибавить отрезок $z(r'')$ к параллелоэдру $P(D_4^*) + \sum_{i=1}^{3} b_i z(r_i)$.

Эти рассуждения справедливы для классов четности B_m для всех $m = 1, 2, 3$. Это значит, что сумма $P(D_4^*) + Z_b(U)$ есть параллелоэдр только, если $|U \cap B_m| \leq 3$ для всех m. Но мы видели, что всякое подмножество $U \subset \mathbb{D}_4$, удовлетворяющее этому условию, унимодулярно. Поэтому справедливо следующее предложение.

Предложение 10 *Каждый параллелоэдр второй совершенной области имеет вид*

$$P(f_b) = P(b_0 p^2 + \sum_{r \in U} b_r \langle r, p \rangle^2) = b_0 P(D_4^*) + Z_b(U),$$

где $b_0 \geq 0$, $b_r \geq 0$ *для всех* $r \in U$ *и* $U \subset \mathbb{D}_4$ *есть унимодулярное множество.*

18 Вторая совершенная область в размерности $n = 5$

Для $n = 5$ и $N = N_5 = \{ijklm\}$ имеем

$$\mathcal{P}_D(5) = \{\pm e_i, i \in N_5;\ q(S), S \subseteq N_5;\ p(S,T),\ S \subseteq T \subset N_5,\ 2 \leq |T| \leq 3,\} \qquad (33)$$

где $q(S) = e(S) - \frac{1}{2} e(N_5)$. Векторы $p(S,T)$ для $T = \{ij\}$ и $T = N_5 - \{ij\} = \{klm\}$ с точностью до знака имеют вид $e_i \pm e_j$, $e_k \pm e_l \pm e_m$. Эти 6 векторов принадлежат одному классу четности C_{ij}. Следуя работе [9], назовем 2 вектора вида $e_i \pm e_j$ *простыми*, а остальные 3 вектора *сложными*.

В работе [9] показано, что если форма $f \in \mathcal{F}(\mathbb{D}_5)$ является внутренней точкой второй совершенной области, то векторы множества $\mathcal{P}_0(5) = \{\pm e_i,\ i \in N_5,\ q(S),\ S \subseteq N_5\}$ суть нормальные векторы параллелоэдра $P(f)$. Если параллелоэдр $P(f)$ примитивен, то он имеет с точностью до знака по одному нормальному вектору из каждого класса четности C_{ij}. Таким образом, каждый L-тип 5-мерного примитивного параллелоэдра характеризуется набором из 10 нормальных векторов, взятых по одному из каждого класса C_{ij}.

В работе [9] каждому такому вектору ставится в соответствие либо красное либо черное ребро двухцветного графа $K_5 = G(\mathbb{D}_n)$, если вектор есть корень $r \in \mathbb{D}_5$. Остальным векторам, являющимися суммами трех единичных векторов (с разными знаками), ставится в соответствие, так называемый b-треугольник *символа* примитивной формы f. В таблице 1 книги [9] приведены все такие символы. Но L-тип определяется не однозначно своим набором нормальных векторов, взятых из класса C_{ij}. Множество L-типов с данным набором образует C-тип (см. [9]).

В случае $n = 5$ предложение 2 дает лишь один тип коренного параллелоэдра $P_5(\gamma_2^k)$. Соответствующая форма $f(\gamma_2^k)$ эквивалентна форме Вороного ω. Форма $f_l^5 = f(\gamma_2^k)$ лежит на крайних лучах нескольких общих областей. Согласно разделу 16, эта форма, в частности, лежит на крайнем луче области Δ_k. Согласно предложению 8, она лежит также на крайнем луче области $\Delta(U)$, где $U \subset \mathbb{D}_5$ есть простое унимодулярное множество.

Согласно предложению 7, любое простое множество $U \subseteq \mathbb{D}_5$ унимодулярно. Поэтому семейство максимальных по включению простых унимодулярных множеств находится во взаимно однозначном соответствии с семейством простых цветных графов K_5, попарно не эквивалентных по перекраске разрезов. Ради удобства, в этом разделе будем называть двухцветные графы *символами*. В [9] найдены все эти символы. Их оказалось 7, и они приведены в таблице 1 книги [9] в качестве первых 7 символов (которые в данном случае суть цветные подграфы графа K_5). Обозначим эти символы G_i, а соответствующие унимодулярные множества U_i, так что $G(U_i) = G_i$, $1 \le i \le 7$. Как графы, все эти символы изоморфны полному графу K_5. В [9] эти символы означают такие L-типы, в которых наборы из 10 нормальных векторов, взятых по одному из каждого класса C_{ij}, состоят только из простых векторов. Это согласуется с утверждением предложения 8.

Назовем два символа *дуальными по цветам*, если один получается из другого переменой красного цвета в черный и ноборот. Тогда 7 символов G_i разбиваются на три пары дуальных символов: (G_1, G_7), (G_2, G_6), (G_3, G_5), а символ G_4 изоморфен дуальному.

Символ G_1 одноцветный и он черный. Множество U_1 есть знаменитое не графическое и не кографическое множество, которое обозначено в [17] как $\mathbf{E}_5$. Множество $\mathbf{E}_5$ есть расширение новым элементом Ω кографического множества $U(K^*_{3,3})$ двудольного графа $K_{3,3}$. Соответствие корней $e_i + e_j$ для всех пар $\{ij\} \subset N_5$ ребрам графа $K_{3,3}$ и элементу Ω подробно описано в статье [34].

Символ, дуальный символу G_1, есть G_7. Он одноцветный и красный. Нетрудно убедиться, что U_7 есть графическое множество, изоморфное $\mathbb{A}_4$, соответствующее полному графу K_5.

Символ G_2 есть символ G_1, в котором одно черное ребро заменено на красное. Пусть $(ij)^+$ есть это черное ребро и оно соответствует элементу Ω в $\mathbf{E}_5$. Если заменить вектор $e_i + e_j$, представляющий элемент Ω в множестве $\mathbf{E}_5$, на вектор $e_i - e_j$, то получим графическое унимодулярное множество U_2. Множество U_2 представляет графический матроид графа $K_{3,3} + e$, где ребро e, соответствующее вектору $e_i - e_j$, соединяет вершины одной доли графа $K_{3,3}$.

Символ G_3 есть символ G_2, в котором одно черное ребро, скажем ребро $(ik)^+$, смежное красному ребру $(ij)^-$, заменено на красное ребро $(ik)^-$. Поэтому $U_3 = U_2 - \{e_i + e_k\} + \{e_i - e_k\}$. Унимодулярное множество U_3 кографическое, представляющее кографический матроид графа, полученного из $K_{3,3} + e$ следующим образом. Из графа $K_{3,3} + e$ удаляется ребро e', смежное ребру e. Полученный граф $K_{3,3} + e - e'$ – плоский. Соответствующий двойственный граф $(K_{3,3} + e - e')^*$ имеет такую вершину степени 4, расщепление которой на пару вершин степени 2, смежных новым ребром e'', представляющим вектор $e_i - e_k$, дает требуемый граф, разрезы которого соответствуют циклам унимодулярного множества U_3 .

Напомню, что символ $G(U^5_k)$ есть полный граф K_5 со всеми красными ребрами, к которым добавлено 4 черных ребра $(i,k)^+$ для всех $i \in N_5 - \{k\}$. Унимодулярное множество U^5_k есть *графическое* множество, соответствующее графу $K_6 - e$, т.е. полному графу на 6 вершинах без одного ребра. Пусть $N_5 \cup \{6\}$ есть множество вершин графа K_6 и вершина k принадлежит множеству N_5. Тогда четыре черных ребра символа $G(U^5_k)$ соответствуют четырем ребрам $(i, 6)$ графа K_6, где $i \in N_5 - \{k\}$, а удаленное ребро e есть $(k, 6)$.

Символы G_6 и G_5 дуальны символам G_2 и G_3, соответственно. Каждый из символов G_6 и G_5 при подходящем выборе вершины k получается из графа $G(U^5_k)$ удалением из каждой пары параллельных разноцветных ребер $(ik)^{\pm}$ по одному ребру.

Символ G_6 есть $G(U_k^5)$, в котором удалены 3 черных ребра вида $(ik)^+$ и одно красное ребро вида $(jk)^-$. Символ G_5 есть $G(U_k^5)$, в котором удалено два черных и два красных ребра.

Унимодулярные множества $U(G_6)$ и $U(G_5)$ графические. Они соответствуют плоским графам на 6 вершинах. Граф, соответствующий графическому унимодулярному множеству $U_6 = U(G_6)$, есть полный граф $K_5 \subset (K_6 - e)$, в котором ребро (ik) заменено висячим ребром $(i6)$. Граф, соответствующий графическому унимодулярному множеству $U_5 = U(G_5)$, получается из предыдущего графа заменой ребра (jk) на новое ребро $(j6)$. Получившемуся в этом графе треугольному циклу $(i, j, 6)$ соответствует следующая зависимость соответствующих векторов $(e_i - e_j) - (e_i + e_k) + (e_j + e_k) = 0$.

Символ G_4 есть объединение черного и красного циклов C_5 на 5 вершинах. Поэтому он самодуален. Пусть $N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ есть множество вершин символа G_4. Пусть черный цикл состоит из ребер $(i, i+1)^+$, где $1 \le i \le 5$ и $5 + 1 \equiv 1$. Тогда красный цикл состоит из ребер $(1, 3)^-$, $(3, 5)^-$, $(5, 2)^-$, $(2, 4)^-$, $(4, 1)^-$. Замечу, что по модулю 5 эти ребра имеют вид $(j-1, j+1)^-$, где, в соответствии с выше приведенным порядком ребер, имеем $j = 2, 4, 1, 3, 5$ (здесь учтено, что $1 \equiv 5 + 1$ и $1 - 1 \equiv 5 \pmod 5$).Соответствующее унимодулярное множество U_4 есть кографическое множество графа ∇C_5. Этот граф есть цикл C_5 на множестве вершин N_5, каждая вершина которого соединена ребром с новой вершиной 0. Ребрам $(i, i+1)$ цикла C_5 сопоставляются векторы $e_i + e_{i+1}$, где $1 \le i \le 5$ и $5 + 1 \equiv 1$. Ребрам $(0, j)$ сопоставляются векторы $e_{j-1} - e_{j+1}$. При таком сопоставлении трем ребрам $(j-1, j)$, $(j, j+1)$, $0, j)$ сопоставляются векторы $e_{j-1} + e_j$, $e_j + e_{j+1}$, $e_{j-1} - e_{j+1}$ такие, что $(e_{j-1} + e_j) - (e_j + e_{j+1}) = e_{j-1} - e_{j+1}$.

Хорошо известно, что форма корневой решетки D_n принадлежит второй совершенной области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$. Более того, существует несколько различных форм, соответствующих решетке D_n. К сожалению, для $n > 5$ я не знаю таких представителей решетки D_n в области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_n)$. Для $n = 5$ известно 10 таких форм f_{ij} для 10 пар индексов $\{ij\} \subset N_5$.

Для фиксированной пары индексов ij, где $i, j \in N_5 = \{ijklm\}$, рассмотрим форму $f(x)$, определенную в (9), со следующими параметрами

$$b_{ij^{\pm}} = 1,\ b_{is^{\pm}} = b_{js^{\pm}} = 0,\ b_{st^+} = 1,\ b_{st^-} = 0,\ , s, t \in \{klm\},\ s \ne t.$$

Таким образом, эта форма имеет вид

$$f_{ij}^5(x) = 2(x_i^2 + x_j^2) + (x_k + x_l)^2 + (x_k + x_m)^2 + (x_l + x_m)^2 = 2\sum_{i \in N_5} x_i^2 + 2(x_k x_l + x_k x_m + x_l x_m).$$

Ниже мы увидим, что эта форма соответствует 5-мерной корневой решетке D_5. Замечу, что все 10 форм f_{ij}^5 для десяти пар $\{ij\} \subset N_5$ лежат на границе совершенной области $\mathcal{F}(\mathbb{D}_5)$, так как каждая из них определяется всего 5-ью ненулевыми параметрами b_r.

Минимальные векторы формы f_{ij}^5 простых классов четности, с точностью до знака, суть следующие 20 векторов нормы 2, где, напомню, $q(S) = e(S) - \frac{1}{2}e(N_5)$.

- 5 векторов e_i, $i \in N_5$;

- 3 вектора $e_k - e_l$, $e_k - e_m$, $e_l - e_m$;
- 12 векторов $q(S)$, где $S \subset N_5$ и $|S \cap \{klm\}| = 1$.

Эти 20 векторов образуют представление системы корней $\mathbb{D}_5$ в метрике $f^5_{ij}(x) = \langle x, A^5_{ij}x\rangle$. Это значит, что для корней r, r' в этом представлении мы имеем $\langle r, r'\rangle_{f^5_{ij}} = \langle r, A^5_{ij}r'\rangle$.

Минимальные векторы 11 сложных классов суть следующие векторы нормы 4.

- Дробные векторы $q(S)$, $q(S) - 2e_t$, $t \in \{klm\}$, из 4 классов четности $C_q(S)$, где $S \subseteq N_5$ и $S \supseteq \{klm\}$, по 4 вектора в каждом классе;
- Целые векторы $p(S,T)$ 6 классов четности $C_p(T)$, где $|T| = 2$ и $|T \cap \{klm\}| = 1$. Это векторы вида $e_i \pm e_k$, $e_j \pm (e_l - e_m)$, по 4 вектора в каждом классе.
- 5 целых векторов $p(S,T)$ одного класса четности $C_p(T)$, где $|T| = 2$ и $|T \cap \{klm\}| = 0$, т.е. $T = \{ij\}$. Это векторы $e_i \pm e_j$, $e_k - e_l - e_m$, $e_k - e_l + e_m$, $e_k + e_l - e_m$

Предложение 11 *Параллелоэдр $P(f^5_{ij})$ коренной, т.е. форма f^5_{ij} лежит на крайнем луче общей области типа.*

Доказательство. Пусть форма $a(p) = \sum_{i,j} a_{ij}p_ip_j$ определена на множестве $\mathcal{P}_D(5)$ и имеет те же минимальные векторы на всех классах четности что и форма f^5_{ij}. Покажем, что система равенств, получающаяся приравниванием значений формы $a(p)$ на всех приведенных выше векторах одного класса четности, с точностью до общего множителя определяет коэффициенты a_{ij} формы $a(p)$.

Рассмотрим класс $C_p(\{ij\})$. Равенство $a(e_i - e_j) = a(e_i + e_j)$ дает $a_{ij} = 0$. Равенства $a(e_k - e_l - e_m) = a(e_k - e_l + e_m) = a(e_k + e_l - e_m)$ эквивалентны равенствам $-a_{kl} - a_{km} + a_{lm} = -a_{kl} + a_{km} - a_{lm} = a_{kl} - a_{km} - a_{lm}$. Отсюда вытекает, что $a_{kl} = a_{km} = a_{lm} = \alpha$.

Равенства для векторов $e_i \pm e_k$, $e_j \pm (e_l - e_m)$ класса четности $C_p(\{ik\})$ имеют вид $a_{ii} + 2a_{ik} + a_{kk} = a_{ii} - 2a_{ik} + a_{kk} = a_{jj} + 2(a_{jl} - a_{jm}) + a_0 = a_{jj} - 2(a_{jl} - a_{jm}) + a_0$, где $a_0 = a_{ll} - 2a_{lm} + a_{mm}$. Отсюда, в частности, вытекает, что $a_{ik} = 0$, $a_{jl} = a_{jm}$. Учитывая, что аналогичные равенства верны для всех классов $C_p(\{st\})$, где $s \in \{ij\}$, $t \in \{klm\}$, получаем $a_{st} = 0$ для тех же пар индексов s, t. Подставляя эти нулевые значения в полученные выше равенства и учитывая, что $a_{lm} = \alpha$, получаем $a_{ii} + a_{kk} = a_{jj} + a_{ll} + a_{mm} - 2\alpha$. Так как эти равенства справедливы для всех пар индексов s, t, где $s \in \{ij\}$ и $t \in \{klm\}$, то имеем $a_{ii} = a_{jj} = \beta$, $a_{kk} = a_{ll} = a_{mm} = 2\alpha$.

Используя снова равенства $a(e_i + e_j) = a(e_k - e_l - e_m)$ для векторов класса $C_p(\{ij\})$, получаем $2\beta = 6\alpha - 2\alpha$, т.е. $\beta = 2\alpha$. Поэтому форма $a(p)$ с точностью до множителя α есть форма f^5_{ij}. $\square$

Используя работы [9] и [15], были найдены шесть типов 5-мерных коренных $P(f_b)$ параллелоэдров второй совершенной области (см. [20]). Напомню, что Рышков и Барановский доказали в книге [9], что всякий параллелоэдр второй совершенной области

$\mathcal{F}(\mathbb{D}_5)$ имеет вид $P(f_b)$, где $f_b(p)=\sum_{r\in\mathbb{D}_5}b_r\langle r,p\rangle^2$. Поэтому ниже я привожу шесть квадратичных форм $f_i\in\mathcal{F}(\mathbb{D}_5)$, $1\le i\le 6$, определяемых шестью весовыми векторами $b_i=\{b_r:r\in\mathbb{D}_5\}$ такими, что параллелоэдры $P_5(b_i)=P(f_{b_i})$ суть коренные параллелоэдры разных типов. Соответствующие параллелоэдры Вороного P_i имеют следующие номера (обозначения) n_i, $1\le i\le 5$, в таблице 2 статьи [15]

$$n_1=42.96,\ n_2=40.42,\ n_3=48.180,\ n_4=54.366-2,\ n_5=50.282,\ n_6=54.342.$$

Замечу, что P_2 есть параллелоэдр Вороного корневой решетки D_5.

Весовой вектор b_1, имеющий координаты

$$b^{\pm}_{ij}=1,\ \{ij\}\subset N_5-\{k\},\ b^{\pm}_{ik}=3, i\in N_5-\{k\},$$

дает

$$f_1(p)=12(\sum_{i\in N_5-\{k\}}p_i^2+2p_k^2).$$

Это есть форма $\omega=f_2^k$ области типа Δ_k описанная Вороным.

Весовой вектор b_2 и форма $f_{b_2}\equiv f^5_{ij}$ были рассмотрены выше. Это есть форма корневой решетки D_5.

Весовой вектор b_3, имеющий координаты

$$b^{\pm}_{1k}=1,\ b^{\pm}_{1l}=0,\ b^{+}_{kl}=1,\ b^{-}_{kl}=0,\ \text{where } k\in\{2,3\},\ l\in\{4,5\},\ b^{\pm}_{23}=0,\ b^{+}_{45}=1,\ b^{-}_{45}=0,$$

дает

$$f_3(p)=4\sum_{i\in\{1,2,3\}}p_i^2+3\sum_{j\in\{4,5\}}p_j^2+2\sum_{k\in\{2,3\},l\in\{4,5\}}p_kp_l+2p_4p_5.$$

Весовой вектор b_4, имеющий координаты

$$b^{\pm}_{1k}=1,\ b^{+}_{1l}=1,\ b^{-}_{1l}=0,\ b^{+}_{kl}=1,\ b^{-}_{kl}=0,\ k\in\{2,3\},\ l\in\{4,5\},\ b^{\pm}_{23}=1,\ b^{+}_{45}=1,\ b^{-}_{45}=0,$$

дает

$$f_4(p)=6\sum_{i\in\{1,2,3\}}p_i^2+4\sum_{j\in\{4,5\}}p_j^2+2\sum_{k\in\{1,2,3\},l\in\{4,5\}}p_kp_l+2p_4p_5.$$

Весовой вектор b_5, имеющий координаты

$$b^{\pm}_{1k}=1,\ k\in\{2,3,4\},\ b^{\pm}_{15}=0,\ b^{+}_{kl}=1,\ b^{-}_{kl}=0,\ \{kl\}\subset\{2,3,4,5\},$$

дает

$$f_5(p)=6p_1^2+5\sum_{i\in\{2,3,4\}}p_i^2+3p_5^2+2p_1p_5+2\sum_{\{kl\}\subset\{2,3,4,5\}}p_kp_l.$$

Весовой вектор b_6, имеющий координаты

$$b^{\pm}_{ij}=1,\ j\in N_4\ b^{+}_{jk}=1,\ b^{-}_{jk}=0,\ \{jk\}\subset N_4,$$

где $N_4 = N_5 - \{i\} = \{jklm\}$, дает форму

$$f_6^i(p) = 8p_i^2 + 5\sum_{j\in N_4} p_j^2 + 2\sum_{\{jk\}\subset N_4} p_jp_k.$$

Минимальные векторы формы f_6^i, где $i \in N_5$, простых классов четности, с точностью до знака, суть следующие 27 векторов, где, напомню, $q(S) = e(S) - \frac{1}{2}e(N_5)$.

- 4 вектора e_j, $j \in N_4$, нормы 5;
- 6 векторов $q(\{jk\})$, $\{jk\} \subset N_4$, нормы 6;
- 8 векторов $q(\{ij\})$, $q(\{j\})$, где $j \in N_4$, нормы 7;
- 7 векторов e_i, $e_j - e_k$, $\{jk\} \subset N_4$, нормы 8;
- 2 вектора $q(N_5)$, $q(N_5 - \{i\})$ нормы 10.

4 сложных классов $C_p(\{ij\})$ для $j \in N_4$ содержат по 5 следующих векторов нормы 13

$$e_i + e_j,\ e_i - e_j,\ e_k - e_l - e_m,\ e_k + e_l - e_m,\ e_k - e_l + e_m.$$

Предложение 12 *Параллелоэдр $P(f_6^i)$ коренной, т.е. форма f_6^i лежит на крайнем луче общей области типа.*

Доказательство. Аналогично тому, как это сделано в предложении 11, используя равенства норм векторов сложных классов $C_p(\{ij\})$, получаем следующие значения элементов матрицы формы $a(p) = \sum_{i,j} a_{ij}p_ip_j$

$$a_{jk} = \alpha,\ \{jk\} \subset N_4,\ a_{ij} = 0,\ a_{jj} = \beta,\ j \in N_4,\ a_{ii} = 2(\beta - \alpha),$$

где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ суть параметры.

Теперь мы используем лемму 1 и следующую зависимость между нормальными векторами параллелоэдра $P(f_6^i)$

$$q(N_5) + q(N_5 - \{i\}) = \sum_{j\in N_4} e_j.$$

Нетрудно проверить, что система из шести равенств $\langle p, x\rangle = f_6^i(p)$ для $p \in \{q(N_5), q(N_5 - \{i\}), e_j, j \in N_4\}$ однозначно определяет вершину с координатами $x_i = 0$, $x_j = 5$, $j \in N_4$. Поэтому, взяв в качестве x эту вершину, мы можем применить лемму 1. Согласно этой лемме, коэффициенты формы $a(p)$ удовлетворяют дополнительному уравнению

$$a(q(N_5)) + a(q(N_4)) = \sum_{j\in N_4} a(e_j).$$

Учитывая, что $a(q(N_5)) = a(q(N_4)) = \frac{1}{4}(2(\beta-\alpha)+4\beta+2\cdot 6\alpha) = \frac{1}{2}(3\beta+5\alpha)$ и $a(e_j) = a_{jj} = \beta$, получаем, что предыдущее равенство принимает форму

$$3\beta + 5\alpha = 4\beta, \text{ т.е. } \beta = 5\alpha.$$

Таким образом, форма $a(p)$ с точностью до множителя α есть форма f_6^i. $\square$

В [9] and [22] показано, что совершенная область $\mathcal{F}(\mathbb{D}_5)$ содержит ровно 200 не эквивалентных общих L-областей. Каждая такая область имеет по крайней мере 10 крайних лучей, натянутых на формы ранга 1. Остальные крайние лучи натянуты на формы, эквивалентные формам f_i, $1 \le i \le 6$, описанным выше и также на форму корневой решетки D_4.

Максимальное число 14 крайних лучей ранга 1 имеет единственная (с точностью до эквивалентности) область Вороного Δ_k. Она симплициальна и форма $\omega = f_2^k = f_{b_1}$ является ее 15-тым крайним лучем. Область Δ_k имеет номер 191 в таблице III книги [9] и в таблице 3 препринта [31].

Область Барнса и Треннери $\Delta_2 = \Delta(\mathbb{A}_4)$ имеет по 5 лучей f_0^k и f_2^k, где $k \in N_5$, и 10 лучей вида $(x_i - x_j)^2$, $1 \le i < j \le 5$. В таблицах III и 3 работ [9] и [31] она имеет номер 1.

В недавно опубликованной работе [41] описаны алгоритмы перечисления всех комбинаторных типов 5-мерных параллелоэдров Вороного (принадлежащих первой, второй и третьей совершенным областям). Их оказалось 110244.

Список литературы

[1] G.F.Voronoi, “Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie de formes quadratiques - Première mémoire, Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **133** (1907), 97–178. (Перевод: О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм, собр. соч. Т.2, Киев. Издат-во АН УССР, 1952, с. 171–238.)

[2] G.F.Voronoi, “Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie de formes quadratiques - Deuxième mémoire, Recherches sur les paralléloedres primitifes”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **134** (1908), 198–287; **136** (1909), 67–178. (Перевод: Исследование о примитивных параллелоэдрах, собр. соч. Т.2, Киев. Издат-во АН УССР, 1952, с. 239–368.)

[3] B.N.Delaunay, “Sur la partition rǵulière de l'espace á 4 dimensions”, *Изв. АН СССР, VII сер. Отд. физ-матем. наук* (1929) Première partie N.1, 79–110, Deuxième partie, N.2, 147–164.

[4] Б.А.Венков, “Об одном классе эвклидовых многогранников”, *Вестник ЛГУ, Сер. матем., мех., астрон.,* **9**:2 (1954), 11–31.

[5] С.С.Рышков, “Некоторые замечания о типах n-мерных параллелоэдров и плотности решетчатых покрытий пространства E^n равными шарами”, *ДАН СССР*, **162**:2 (1965) 277–280.

[6] E.S.Barnes, P.W.Trenerry, “A class of extreme lattice-coverings of n-space by spheres”, *J. Austral. Math. Soc.*, **14**:2 (1972) 247–256.

[7] T.J.Dickson, “On Voronoi reduction of positive definite quadratic forms”, *J. of Number Theory*, **4** (1972) 330–341.

[8] М.Штогрин, “Правильных разбиения Дирихле–Вороного для второй триклинной группы”, *Труды МИАН*, **123** (1973) 128с.

[9] С.С.Рышков, Е.П.Барановский, “С-типы n-мерных решеток и пятимерные примитивные параллелоэдры (с приложением к теории покрытий)”, *Труды МИАН* **137** (1976).

[10] М.Айгнер, “Комбинаторная теория”, М.:Мир, 1982.

[11] J.H.Conway, N.J.A.Sloane, “Sphere packings, lattices and groups”, Grundlagen der mathematischen Wissenschaften 290, 1st ed. Berlin: Springer Verlag, 1987. Русский перевод: Дж.Конвей, Н.Слоэн, “Упаковки шаров, решетки и группы”, М. Мир, 1990.

[12] H.-F.Loesch, “Zur Reductionstheorie von Delony-Voronoi für matroidische quadratische Formen”, Dissertition. Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, 1990.

[13] J.H.Conway, N.J.A.Sloane, "The cell structures of certain lattices", in: *Miscellanea Mathematica*, Springer-Verlag, Berlin at al. (1991) 71–107.

[14] R.Erdahl, S.Ryshkov, "On lattice dicing", *Europ. J. Combinatorics*, **15** (1994) 459–481.

[15] P.Engel, "Investigations of parallelohedra in $\mathbb{R}^d$", in: *Voronoi's impact on modern science*, P.Engel, H.Syta eds., Inst. of Mathematics, Kyiv, 1998, Vol.2, 22–60.

[16] С.С.Рышков, "О структуре примитивного параллелоэдра и о последней проблеме Вороного", *УМН*, **53**:2 (1998) 161–162.

[17] V.Danilov, V.Grishukhin, "Maximal unimodular systems of vectors", *Europ. J. Combinatorics* **20** (1999) 507–526.

[18] С.С.Рышков, "Прямое геометрическое описание n-мерных параллелоэдров второго типа Вороного", *УМН*, **54**:1 (1999) 263–264.

[19] Е.П.Барановский, В.П.Гришухин, "Алгоритм вычисления степени нежесткости L-разбиения решетки", *Вестник ивановского гос. университета*, вып.3 (2000), 116–122. **195**:5 (2004), 59–78.

[20] E.Baranovskii, V.Grishukhin, "Non-rigidity degree of a lattice and rigid lattices", *Europ. J. Combinatorics*, **22** (2001) 921–935.

[21] P.Engel, V.Grishukhin, "An example of a non-simplicial L-type domain", *Europ. J. Combinatorics*, **22** (2001) 491–496.

[22] P.Engel, V.Grishukhin, "There are exactly 222 L-types of primitive five-dimensional lattices", *Europ. J. Combinatorics*, **23** (2002) 275–279.

[23] В.П.Гришухин, "Параллелоэдры ненулевой толщины", *Матем. сб.*, **195**:5 (2004), 59–78.

[24] M.Deza, V.Grishukhin, "Non-rigity degree of root lattices and their dual", *Geometriae Dedicata*, **104** (2004) 15–24.

[25] M.Deza, V.Grishukhin, "Properties of parallelotopes equivalent to Voronoi's conjecture", *Europ. J. Combinatorics* **25** (2004) 517–533.

[26] A.Ordine, "Proof of the Voronoi conjecture on parallelotopes in a new special case", Ph.D. thesis, Queen's University, Ontario, 2005.

[27] A.Garber, A.Poyarkov, "On permutahedra", in: Voronoi's impact on modern science, Proc. of 3rd Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations. Kyiv, Inst. Math. Book 3 (2005) 137–145.

[28] С.С.Рышков, Е.А.Большакова, "К теории коренных параллелоэдров", *Известия РАН, Сер. математическая*, **69**:6 (2005) 187–210.

[29] В.П.Гришухин, “Сумма параллелоэдра и отрезка по Минковскому”, *Матем. сб.*, **197**:2 (2006), 15–32.

[30] V.P.Grishukhin, “A remarkable family of six-dimensional lattices”, Препринт #WP/2006/264, ЦЭМИ (2006), 64с.

[31] В.П.Гришухин, “Примитивные L-типы пятимерных решеток”, Препринт #WP/2007/229, ЦЭМИ (2007), 41с.

[32] M.Dutour Sikirić, V.Grishukhin, “How to compute the rank of a Delaunay polytope”, *Europ. J. Combinatorics* **28** (2007) 762–773.

[33] Н.П.Долбилин, “Свойства граней параллелоэдров”, *Труды МИАН* **266** (2009) 112–126.

[34] В.П.Гришухин, В.И.Данилов, Г.А.Кошевой, “Унимодулярные системы вектров вложимы в (0,1)-куб”, *Матем. заметки*, **88**:6 (2010), 938–941.

[35] M.Melo, F.Viviani, “Comparing perfect and 2nd Voronoi decompositions: the matroidal locus”, arXiv:1106.3291v2 [math.CO], 9 Dec. 2011.

[36] V.P.Grishukhin, “A computation of a type domain of a parallelotope”, in: Abstracts of 5th Internat. Conf. on Analitic Number Theory and Spatial Tesselations, National Pedagogical Dragomanov Univ., Kyiv, Ukraine, 16–20.09.2013, 69–71.

[37] V.P.Grishukhin, “A definition of type domain of a parallelotope”, *Модел. и анализ информ. систем*, **20**(6), (2013) 129–134.

[38] M.Dutour Sikirić, V.Grishukhin, A.Magazinov, “On the sum of a parallelotope and a zonotope”, *Europ. J. Combinatorics* **42**, (2014) 49–73.

[39] В.П.Гришухин, “Параллелоэдры, определяемые квадратичной формой”, Труды МИАН **288** (2015) 81–93.

[40] R.Erdahl, V.Grishukhin, “Minkowski sum of a Voronoi parallelotope and a segment”, *Mathematics and Statistics*, **3**:6 (2015), 151–156.

[41] M.Dutour Sikirić, A.Garber, A.Schürmann, C.Waldmann, “The complete classification of five-dimensional Dirichlet- Voronoi polyhedra of translation lattices” *Acta Crystallographica Section A* (2016) 26pp. (см. также: Acta Cryst. A72, doi: 10.1107/S2053273316011682)

ИЗДАНИЯ ЦЭМИ РАН

2016 г.

Препринты

1. **Скрыпник Д.В.** Бюджетная политика и экономический рост / Препринт # WP/2016/316. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 61 с. (Рус.)
2. **Граборов С.В., Пителин А.К.** Макроэкономическая эффективность бюджетно-налоговых решений: принципы и модели / Препринт # WP/2016/317. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 45 с. (Рус.)
3. **Ушкова В.Л., Ильменская Е.М., Перфиличева Н.А.** Система учета и мониторинга научных результатов в научном учреждении / Препринт # WP/2016/318. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 35 с. (Рус.)
4. **Даниелян В.А.** Детерминанты пенсионного возраста: обзор исследований / Препринт # WP/2016/319. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 88 с. (Рус.)
5. **Гришухин В.П.** Первая и вторая совершенные области положительных квадратичных форм / Препринт # WP/2016/320. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 57 с. (Рус.)

Книги

1. **Стратегическое планирование и развитие предприятий**. В 5 т. / Материалы семнадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 12–13 апреля 2016 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 899 с.
2. **Стратегическое планирование и развитие предприятий** / Пленарные доклады и материалы Круглого стола Шестнадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 14–15 апреля 2015 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 97 с.
3. **Многомерный статистический анализ и эконометрика** // Труды IX-й Международной школы-семинара. Цахкадзор, 2016 г. / Под ред. С.А. Айвазяна.– М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 122 с.
4. **Модели и методы инновационной экономики** / Сборник научных трудов под ред. Е.Ю. Хрусталёва. Вып. 9. – М.: ЦЭМИ РАН, МАОН, 2016. – 173 с. (Рус.)
5. **Теория и практика институциональных преобразований в России** / Сборник научных трудов под ред. Б.А. Ерзнкяна. Вып. 35. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 174 с. (Рус., англ.)
6. **Теория и практика институциональных преобразований в России** / Сборник научных трудов под ред. Б.А. Ерзнкяна. Вып. 36. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 174 с. (Рус., англ.)
7. **Модели и методы инновационной экономики** / Сборник научных трудов под ред. Е.Ю. Хрусталёва. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, МАОН, 2016. – 149 с. (Рус.)

Central Economics and Mathematics Institute Russian Academy of Sciences
Publications

2016

Working papers

1. **Skrypnik D.V.** Budget Policy and Economic Growth / Working paper # WP/2016/316. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2016. – 61 p. (Rus.)
2. **Graborov S.V., Pitelin A.K.** Macroeconomic Efficiency of Budget and Tax Decisions: Principles and Models / Working paper # WP/2016/317. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2016. – 45 p. (Rus.)
3. **Ushkova V.L., Ilmenskaya E.M., Perfilicheva N.A.** Accounting system and monitoring of scientific results in the scientific institution / Working paper # WP/2016/318. Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2016. – 35 p. (Rus.)
4. **Danielyan V.A.** Determinants of Retirement Age: A Review of Research / Working paper # WP/2016/319. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2016. – 88 p. (Rus.)
5. **Grishukhin V.P.** The First and the Second Perfect Domains of Positive Quadratic Forms / Working paper # WP/2016/320. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2016. – 57 p. (Rus.)

Books

1. **Strategic Planning and Evolution of Enterprises**. 5 issues / Materials. Seventeenth Russian Symposium. Moscow, April 12–13, 2016. Ed. by G.B. Kleiner. – Moscow, CEMI RAS, 2016. – 899 p.
2. **Strategic Planning and Evolution of Enterprises** / Plenary reports and materials of the Round table. Sixteenth Russian Symposium. Moscow, April 14–15, 2015. Ed. by G.B. Kleiner. – Moscow, CEMI RAS, 2016. – 97 p.
3. **Multivariate statistical analysis and econometrics** // Proceedings of IXth International School-Seminar. Town of Tsakhkadzor, the Republic of Armenia / By ed. S.A. Aivazian. – M.: CEMI RAS, 2016. – 122 p.
4. **Models and Methods of Innovation Economy** / Collection of scientific papers by ed. Ey.Yu. Khrustalyov. Issue 9. – Moscow, CEMI RAS, IASS, 2015. – 173 p.
5. **Theory and Practice of Institutional Reforms in Russia** / Collection of scientific works ed. by B.H. Yerznkyan. Issue 35. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2016. – 174 p. (Rus., Eng.)
6. **Theory and Practice of Institutional Reforms in Russia** / Collection of scientific works ed. by B.H. Yerznkyan. Issue 36. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2016. – 174 p. (Rus., Eng.)
7. **Models and Methods of Innovation Economy** / Collection of scientific papers by ed. Ey.Yu. Khrustalyov. Issue 10. – Moscow, CEMI RAS, IASS, 2015. – 149 p.

ISBN 978-5-8211-0739-8

9 785821 107398

Заказ № 36 Объем 3,6 п.л. Тираж 50 экз.

ЦЭМИ РАН