

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН
CENTRAL ECONOMICS AND MATHEMATICS INSTITUTE RAS

РОССИЙСКАЯ
АКАДЕМИЯ НАУК

RUSSIAN
ACADEMY OF SCIENCES

Л.Г. Бабат

ОВАЛИЗОВАННЫЕ
ОКТАЭДРИЧЕСКИЕ АЛМАЗЫ
И ε -ОПТИМАЛЬНЫЕ
КРУГЛЫЕ БРИЛЛИАНТЫ

Препринт # WP/2014/307

МОСКВА
2014

Бабат Л.Г. Овализованные алмазы и ε -оптимальные круглые бриллианты / Препринт # WP/2014/307. – М.: ЦЭМИ РАН, 2014. – 77 с. (Рус.)

Исследуется вопрос влияния формы алмаза на стоимость получаемых из него круглых бриллиантов. Пусть K – класс высококачественных (наиболее ценных) алмазов, имеющих форму октаэдра. Пусть алмазы из Q являются результатами скругления ребер и вершин алмазов из K . В [3] построен способ, позволяющий для любого алмаза из K найти среди получаемых из него круглых бриллиантов ε -оптимальный. В данном препринте этот способ распространяется на $K \cup Q$.

Ключевые слова: алгоритм, октаэдрический алмаз, овализованный октаэдрический алмаз, круглый бриллиант, ε -оптимальный бриллиант, математический метод.

JEL коды: C 69.

Babat L.G. Rounded Raw Diamonds and ε -optimal Round Polished Diamonds / Working paper # WP/2014/307. – Moscow, CEMI RAS, 2014. – 77 p. (Rus.)

The influence of a raw diamond shape on the maximum size of the round polished diamond produced from that raw diamond is investigated. Let K is the class of high-quality diamond crystals (crystals having the form of octahedron). Let diamonds from Q are results of rounding vertexes and edges of diamonds from K . In [3] is offered the method with allows for any diamond $D \in K$ to find the ε -optimal polished diamond that can be produced from D . In this paper the method offered in [3] spreads on raw diamonds from $K \cup Q$.

Keywords: algorithm, octahedral diamond, rounded octahedral diamond, round polished diamond, ε -optimal polished diamond, mathematical method.

JEL code: C 69.

ISBN 978-5-8211-0663-6

© Бабат Л.Г., 2014 г.

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Центральный экономико-математический институт РАН, 2014 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ОКТАЭДРИЧЕСКИЕ АЛМАЗЫ И КРУГЛЫЕ БРИЛЛИАНТЫ	5
2. ОВАЛИЗОВАННЫЕ ОКТАЭДРИЧЕСКИЕ АЛМАЗЫ	17
3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, СВЯЗАННЫЕ С ТЕСНЫМИ МОДЕЛЯМИ	25
4. ВНЕШНИЕ ВЕКТОРЫ И БРИЛЛИАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ	40
5. ЭТАЛОННЫЕ МОДЕЛИ И ИХ СИММЕТРИЗАЦИИ	53
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	73
ЛИТЕРАТУРА	74
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	75
ОБ АВТОРЕ.....	77

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением работы [3], где изучались вопросы, касающиеся связи формы алмаза с максимальным диаметром (радиусом) круглого бриллианта, который может быть изготовлен из алмаза. В работе [3] эти вопросы рассматривались для высококачественных (т.е. наиболее ценных) алмазов. Такой алмаз представляет собой восьмигранник, который можно получить из правильного октаэдра (идеального кристалла алмаза), смещая плоскости его граней параллельно самим себе. В дальнейшем указанные многогранники (и алмазы) будем называть *октаэдрическими*.

Чтобы круглый бриллиант можно было изготовить из алмаза, он должен определённым образом вкладываться в этот алмаз. Требования, накладываемые на способ вложения, вызваны технологическими ограничениями, обусловленными наличием в кристалле алмаза, так называемых, мягких и жёстких направлений. Вложение круглого бриллианта, удовлетворяющее технологическим ограничениям, назовём *допустимым*. Пусть $\varepsilon > 0$. Круглый бриллиант D назовём *ε -оптимальным* для алмаза A , если (а) D допустимо вкладывается в A ; (б) вес D отличается не более, чем на ε , от верхней границы весов круглых бриллиантов, допустимо вкладываемых в A .

В [3] был предложен метод, который, для любого октаэдрического алмаза A и любого $\varepsilon > 0$, позволяет осуществить следующее: (а) вычислить вес ε -оптимального для A круглого бриллианта; (б) найти допустимое вложение в A ε -оптимального для этого алмаза круглого бриллианта. В настоящей работе данный метод распространяется на алмазы близкие к октаэдрическим, но не являющиеся таковыми. А именно на алмазы, которые можно получить из октаэдрических путём «скругления» (срезания или скалывания) вершин и некоторых рёбер. Будем называть такие алмазы *овализованными* октаэдрическими алмазами.

Отметим, что математические аспекты вопросов, связанных с правильной стоимостной оценкой и оптимальной обработкой алмазов, мало изучены. Полученные в работах [1–4] и в настоящей работе результаты представляют собой первые шаги в этой обширной, весьма интересной и практически важной области.

Выражаю свою огромную благодарность А.А. Фридману, который стоял у истоков данной проблематики. Без его постоянной помощи и советов ни эта работа, ни работы [1–4] никогда не была бы написаны. Выражаю большую благодарность В.П. Гришухину, который взял на себя труд прочесть несколько вариантов настоящей работы и каждой из работ [1–4]. Его замечания сыграли неоценимую роль при написании этих работ. Выражаю благодарность также М.И. Штогрину за внимательное прочтение и доброжелательное обсуждение настоящей работы и работ [3, 4]. Без этого обсуждения текст указанных работ был бы существенно менее «читаемым».

1. ОКТАЭДРИЧЕСКИЕ АЛМАЗЫ И КРУГЛЫЕ БРИЛЛИАНТЫ

Основная цель этого пункта – сделать возможным прочтение настоящей работы без предварительного знакомства с работой [3]. В связи с чем, в данном пункте будут повторены определения тех понятий из [3], которые используются в настоящей работе. Также будут сформулированы те из установленных в [3] свойств этих понятий, которые необходимы для данной работы (доказательства указанных свойств переносятся из [3], естественно, не будут). Для облегчения чтения разобьём описание требуемых понятий и их свойств на 3 шага.

На 1-м шаге будет сформулировано строгое определение *октаэдрического многогранника*. Кроме того будут введены объекты, с помощью которых в настоящей работе, вслед за [3], будут задаваться такие многогранники.

На 2-м шаге будут описаны фигуры, с помощью которых при расчётах принято моделировать круглые бриллианты. Назовём эти фигуры *круглобриллиантами*. На этом же шаге будут сформулированы условия, при которых *круглобриллиант*, вложенный в *октаэдрический многогранник*, можно рассматривать в качестве математической модели круглого бриллианта, который можно получить из алмаза, имеющего форму данного многогранника (эти условия связаны с наличием в алмазах, так называемых, мягких и жёстких направлений). Вложения, удовлетворяющие сформулированным условиям, назовём *допустимыми*.

На 3-м шаге среди всех пар, состоящих из *октаэдрического многогранника* и *допустимо* вложенного в него *круглобриллианта*, выделим такие, которые назовём *тесными моделями*. Укажем основные свойства *тесных моделей*.

Для наглядности изобразим последовательность перечисленных шагов в виде блок-схемы (рис. 1).

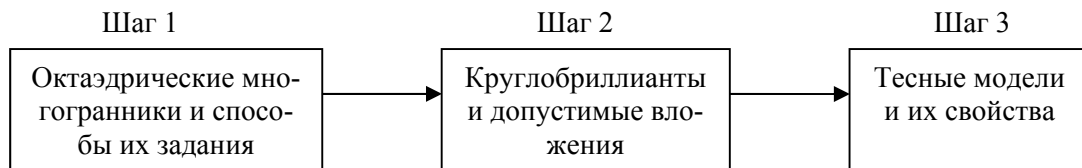


Рис. 1

Приступим к изложению 1-го шага этой блок-схемы. Начнём с того, что свяжем с каждым кубом тетраэдры, которые назовём *индуцированными* данным кубом.

Определение 1. Скажем, что тетраэдр T *индуцирован* кубом Q , если на каждой грани куба Q лежит ровно одно ребро тетраэдра T , причём ребро тетраэдра, лежащее на грани куба, является её диагональю (см. рис. 2, где изображены два тетраэдра, индуцированные кубом $AB^*BA^*DC^*CD^*$). ■

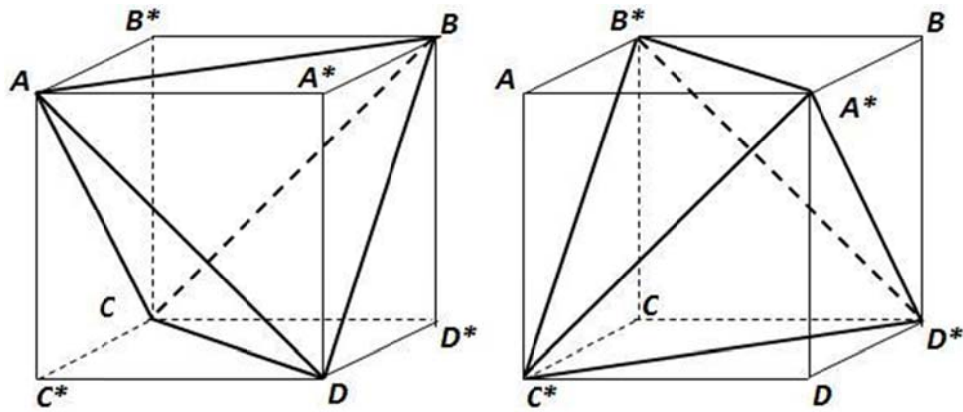


Рис. 2

Пусть G – грань куба Q , а T – индуцированный этим кубом тетраэдр. На G есть ровно две диагонали, поэтому существует ровно два способа, которыми можно расположить на грани G ребро тетраэдра T . Ясно, что выбор положения ребра тетраэдра T на грани G однозначно определяет положение ребер данного тетраэдра на всех гранях куба Q . Сопоставляя это с тем, что при повороте на 90° вокруг оси куба, проходящей через грань G , её диагонали переходят одна в другую, и с тем, что все диагонали всех граней куба равны друг другу, получаем следующий факт.

Утверждение 1. Каждый куб индуцирует ровно два тетраэдра, причем: (а) оба тетраэдра правильные; (б) при повороте куба на 90° вокруг его оси один из этих тетраэдров переходит в другой. ■

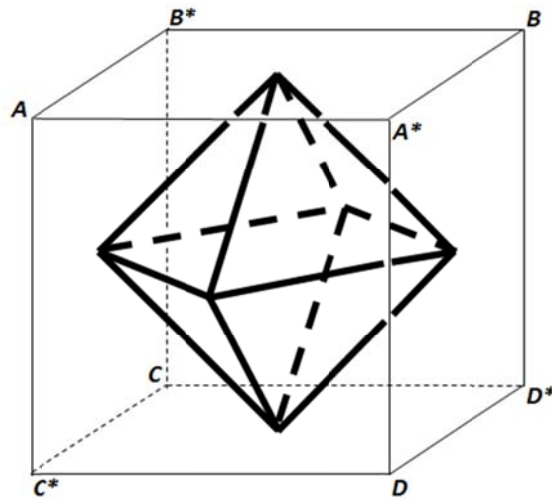


Рис. 3

Несложно увидеть, что пересечение обоих тетраэдров индуцированных каким-либо кубом представляет собой правильный октаэдр с вершинами в центрах граней куба (подробнее см. [3, 4]). Чтобы придать данному факту наглядность, приведём три рисунка. На первом (рис. 3) изображен правильный октаэдр с вершинами в центрах граней куба. На втором (рис. 4) изображено расположение данного октаэдра относительно каждого из тетраэдров, индуцированных кубом. На третьем (рис. 5) оба тетраэдра, октаэдр и куб изображены совместно. На каждом из рисунков октаэдр выделен жирными линиями.

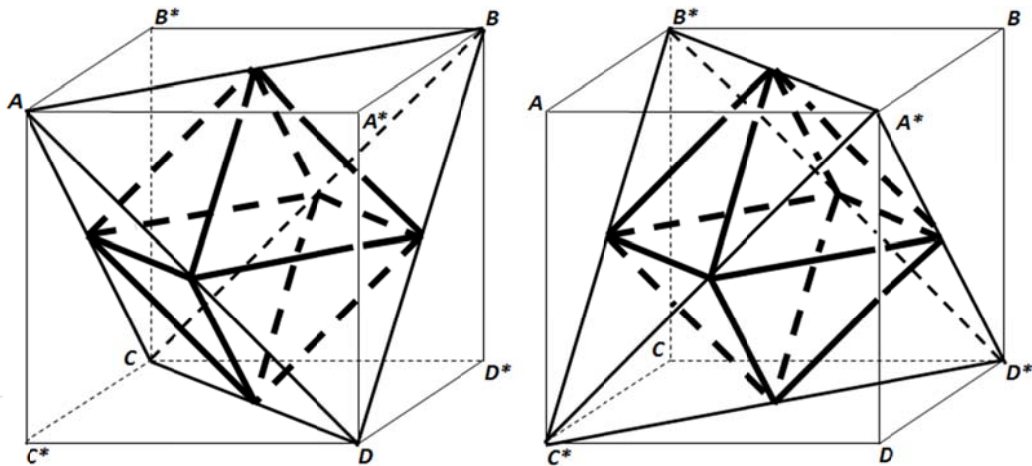


Рис. 4

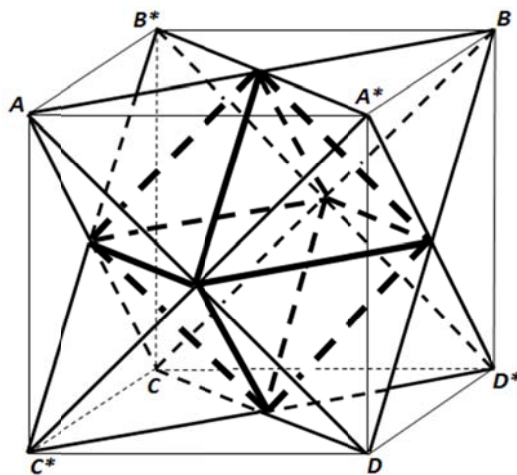


Рис. 5

Помимо понятия тетраэдра индуцированного кубом, при определении *октаэдрических многогранников*, будет использоваться следующее отношение между тетраэдрами.

Определение 2. Тетраэдр A назовём **скооперированным** с тетраэдром B , если A получается из B путём параллельного сдвига одной из плоскостей, на которых лежат грани тетраэдра B , причём в тетраэдре B имеется, по крайней мере, одна внутренняя точка, которую сдвигаемая плоскость не пересекает при своём движении. ■

Замечание. Нетрудно показать, что отношение скооперированности симметрично относительно A и B (см. [3]). Ввиду этого в дальнейшем будет использоваться упрощённая терминология: будем говорить, что тетраэдры A и B **скооперированы**, подразумевая, что каждый из этих тетраэдров скооперирован с другим. ■

Опираясь на отношение скооперированности, введём такое отношение между парами тетраэдров.

Определение 3. Две пары тетраэдров $\{A; B\}$ и $\{C; D\}$ назовём **состыкованными**, если каждую из этих пар можно упорядочить так, что: (а) тетраэдры, оказавшиеся в получившихся упорядоченных парах на первых местах, будут совпадать; (б) тетраэдры, оказавшиеся в получившихся упорядоченных парах на вторых местах, будут скооперированы. ■

Используя понятие тетраэдра индуцированного кубом и отношение состыкованности, определим объекты, которые назовём *октаэдрическими парами*.

Определение 4. Пару правильных тетраэдров $\{M; N\}$ назовём *октаэдрической парой*, если существует пара $\{A_0; B_0\}$ тетраэдров, индуцированных каким-либо кубом, и существует цепочка пар тетраэдров

$$\{A_0; B_0\} \rightarrow \{A_1; B_1\} \rightarrow \dots \rightarrow \{A_{k-1}; B_{k-1}\} \rightarrow \{A_k; B_k\} = \{M; N\}, \quad (1)$$

которая при каждом $j = 1, \dots, k$ удовлетворяет условиям: (а) пара $\{A_j; B_j\}$ состыкована с парой $\{A_{j-1}; B_{j-1}\}$; (б) пересечение $A_j \cap B_j$ имеет общую внутреннюю точку с пересечением $A_{j-1} \cap B_{j-1}$. ■

Типичное взаимное расположение тетраэдров $ABCD$ и $A^*B^*C^*D^*$, образующих октаэдрическую пару, приведено на рис. 6, где для наглядности тетраэдр $A^*B^*C^*D^*$ заштрихован (чтобы не загромождать чертёж, изображения «невидимых» линий опущены).

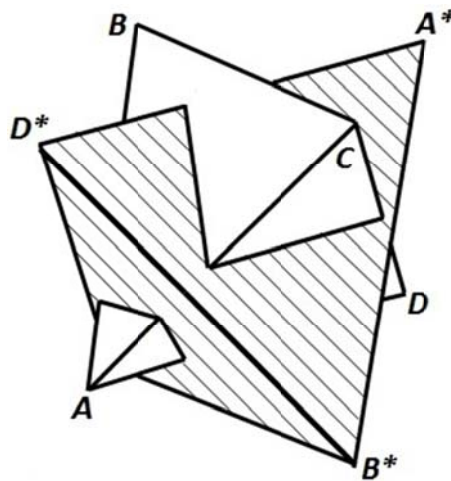


Рис. 6

Опираясь на понятие октаэдрической пары, дадим следующее определение октаэдрических многогранников, т.е. многогранников, посредством которых будут моделироваться октаэдрические алмазы.

Определение 5. Многогранник P назовём *октаэдрическим*, если (а) P является пересечением правильных тетраэдров M и N , образующих октаэдрическую пару; (б) P является восьмигранником. Тетраэдры M и N назовём *компонентами* октаэдрического многогранника P . ■

Замечание 1. Поясним, почему в этом определении оговаривается, что многогранник непременно должен быть восьмигранником. Ясно, что многогранник, являющийся пересечением тетраэдров, составляющих октаэдрическую пару, не может иметь более 8 граней. Однако он может иметь менее 8 граней. Например, если взять октаэдрическую пару, состоящую из тетраэдров, индуцированных кубом, и сдвинуть грани одного тетраэдра к центру куба, не пересекая этот центр, можно получить ситуацию, изображённую на рис. 7, в которой один тетраэдр лежит внутри другого. Т.е. ситуацию, когда пересечение тетраэдров, образующих октаэдрическую пару, представляет собой тетраэдр (и потому

имеет всего 4 грани). Сопоставляя это с тем, что октаэдрический алмаз должен иметь 8 граней, видим, что оговаривать наличие у пересечения 8-ми граней необходимо.

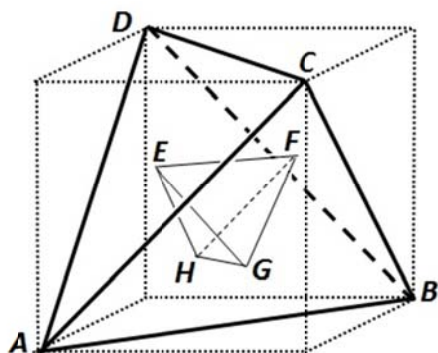


Рис. 7

Замечание 2. Поясним теперь, зачем нужны октаэдрические пары, пересечение тетраэдров из которых *не является* октаэдрическим многогранником. Дело в том, что октаэдрические пары, пересечение тетраэдров из которых, *является* октаэдрическим многогранником, составляют незамкнутое подмножество множества всех октаэдрических пар. Поэтому попытка ограничиться рассмотрением только этого подмножества порождает трудности, связанные с возможным отсутствием объекта, к которому сходится последовательность пар из данного подмножества. Формулировки утверждений становятся менее наглядными, а их обоснования более громоздкими. ■

Для наглядности приведём на рис. 8 примеры октаэдрических многогранников (чтобы не загромождать рисунок, компоненты многогранников не изображаются). На фиг. 1 изображён правильный октаэдр. На фиг. 2 изображён октаэдрический многогранник, который получается из правильного октаэдра, параллельным сдвигом вовне плоскости, содержащей его грань AED (которая переходит в плоскость грани $A'E'D'$). На фиг. 3 изображён октаэдрический многогранник, который получается из многогранника, изображённого на фиг.2, параллельным сдвигом вовне плоскости, содержащей его грань BCF (которая переходит в плоскость грани $B'C'F'$). Отметим, что многогранник, изображённый на фиг. 3 является типичным примером октаэдрического многогранника.

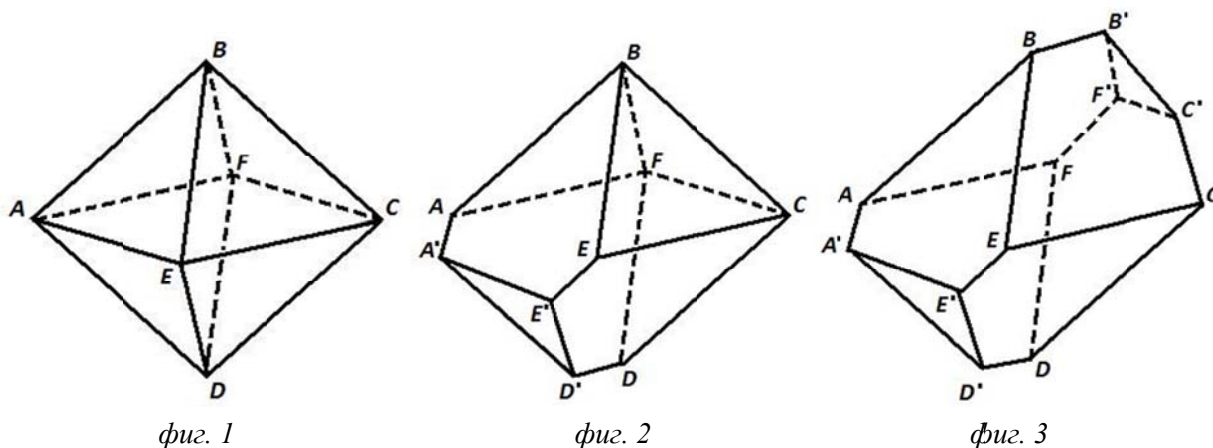


Рис. 8

Возникает вопрос, насколько однозначно определены компоненты октаэдрического многогранника. Т.е. могут ли различные октаэдрические пары $\{M; N\}$ и $\{K; L\}$ задавать один и тот же октаэдрический многогранник. Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема, установленная в [3].

Теорема 1. Пусть P – октаэдрический многогранник. Если октаэдрические пары $\{M; N\}$ и $\{K; L\}$ таковы, что каждое из пересечений $M \cap N$ и $K \cap L$ совпадает с P , то один из правильных тетраэдров, входящих в пару $\{K; L\}$ совпадает с M , а другой – с N . ■

В дальнейшем для задания октаэдрических пар будут использоваться специальные объекты, которые будут названы *н-гранями* (от слов нормаль и грань).

Определение 6. Назовем *н-гранью* пару $\{\alpha; \vec{A}\}$, где α – плоскость, а \vec{A} – выходящая из точки этой плоскости её нормаль. Плоскость α делит пространство на два открытых полупространства: $H_{+\alpha}$, куда направлен вектор \vec{A} , и $H_{-\alpha}$, куда этот вектор не направлен. Объединение $\alpha \cup H_{-\alpha}$ (т.е. замыкание полупространства $H_{-\alpha}$) назовем *собственным полупространством* н-грани $\{\alpha; \vec{A}\}$, а объединение $\alpha \cup H_{+\alpha}$ (т.е. замыкание полупространства $H_{+\alpha}$) – *несобственным полупространством* этой н-грани. ■

Для удобства дальнейших ссылок оформим в виде леммы такое очевидное свойство н-граней.

Лемма 1. Если $\{\alpha; \vec{A}\}$ – н-грань, T – точка плоскости α , а Q – точка пространства, то Q лежит внутри собственного (соответственно несобственного) полупространства н-грани $\{\alpha; \vec{A}\}$ тогда и только тогда, когда скалярное произведение $(\vec{TQ}; \vec{A})$ удовлетворяет неравенству $(\vec{TQ}; \vec{A}) < 0$ (соответственно неравенству $(\vec{TQ}; \vec{A}) > 0$). ■

Из известных свойств углов со взаимно перпендикулярными сторонами вытекает ещё одно свойство н-граней.

Лемма 2. Пересечение собственных полупространств н-граней $\{\alpha; \vec{A}\}$ и $\{\beta; \vec{B}\}$ является острым (соответственно тупым) двугранным углом тогда и только тогда, когда скалярное произведение $(\vec{A}; \vec{B})$ векторов \vec{A} и \vec{B} отрицательно (соответственно положительно). ■

Введём следующие отношения между векторами.

Определение 7. Векторы \vec{A} и \vec{B} назовем *положительно коллинеарными* (соответственно *отрицательно коллинеарными*), если $\vec{A} = c \cdot \vec{B}$, где $c > 0$ (соответственно $c < 0$). ■

Опираясь на эти отношения, определим понятие эквивалентности н-граней.

Определение 8. Н-грани $\{\alpha; \vec{A}\}$ и $\{\beta; \vec{B}\}$ назовем *эквивалентными*, если плоскости α и β совпадают, а векторы \vec{A} и \vec{B} положительно коллинеарны. ■

Очевидно такое утверждение.

Лемма 3. Собственные (соответственно несобственные) полупространства н-граней совпадают тогда и только тогда, когда эти н-грани эквивалентны. ■

Распространим понятие эквивалентности на наборы n -граней.

Определение 9. Упорядоченные наборы n -граней назовём *эквивалентными*, если эти наборы имеют одинаковую длину и n -грани одного набора эквивалентны стоящим на тех же местах n -граням другого набора. *Неупорядоченные* наборы n -граней назовём *эквивалентными*, если их можно упорядочить таким образом, что они превратятся в *эквивалентные* упорядоченные наборы. ■

Свяжем с каждым выпуклым многогранным множеством набор n -граней, который назовём порождающим набором этого множества.

Определение 10. Пусть M – многогранное множество, $\overline{N}_1, \overline{N}_2, \dots, \overline{N}_k$ – внешние нормали его граней, а $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ – плоскости, на которых лежат эти грани. Наборы n -граней эквивалентные набору $\{\{\gamma_1; \overline{N}_1\}, \{\gamma_2; \overline{N}_2\}, \dots, \{\gamma_k; \overline{N}_k\}\}$ назовём *порождающими наборами* многогранного множества M . ■

Как известно, для задания выпуклого многогранного множества достаточно задать два рода объектов: во-первых, плоскости, содержащие грани множества, а во-вторых, внешние нормали граней множества. Пользуясь понятием порождающего набора, придадим этому свойству следующий удобный для дальнейших ссылок вид.

Лемма 4. Выпуклое многогранное множество является пересечением собственных полупространств n -граней, образующих порождающий набор этого множества. ■

Опираясь на этот факт, будем задавать всякую октаэдрическую пару посредством порождающих наборов правильных тетраэдров, составляющих эту пару.

* * *

Перейдем к изложению 2-го шага блок-схемы, изображённой на рис. 1. В соответствии с общепринятым подходом круглый бриллиант моделируется в работе посредством *круглобриллианта* – фигуры, которая напоминает юлу и состоит из конуса, цилиндра и усеченного конуса (рис. 9, фиг. 1). На фиг. 2 рис. 9 указаны границы линейных и угловых параметров круглобриллианта, причём границы линейных параметров указаны в процентах к диаметру входящего в него цилиндра. Входящие в состав круглобриллианта конус, цилиндр и усеченный конус принято называть соответственно его *шипом*, *рундистом* и *шапкой*. Ось рундиста называется *осью круглобриллианта*, а центр рундиста – *центром круглобриллианта*. Договоримся считать, что ось круглобриллианта ориентирована по направлению от шипа к шапке. Основание рундиста, являющееся одновременно основанием шапки круглобриллианта, назовём *верхним* основанием рундиста, а его основание, являющееся одновременно основанием шипа круглобриллианта, назовём *нижним* основанием рундиста.

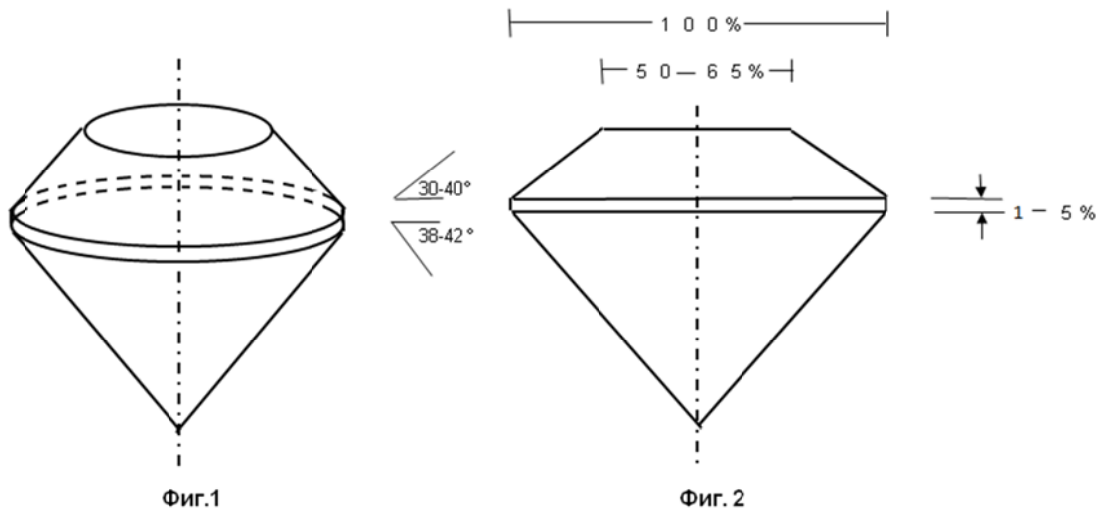


Рис. 9

В дальнейшем будет использоваться такая терминология.

Определение 11. Отношение высоты цилиндра к его диаметру назовём *калибром* цилиндра. *Калибр* рундиста круглобриллианта назовём *калибром* круглобриллианта.

Стандарты огранки алмазов позволяют принять следующее соглашение, касающееся взаимосвязности угловых и линейных параметров круглобриллиантов.

Соглашение 1. Оба угловых параметра круглобриллианта однозначно определяются его калибром. Диаметр (радиус) меньшего основания шапки круглобриллианта однозначно определяется калибром круглобриллианта и диаметром (радиусом) его рундиста. ■

Замечание. Возможность принятия данного соглашения объясняется с тем, что одна из целей огранки (цель, которой нельзя пренебрегать) – внешняя красота и «игра» бриллианта. Именно это обстоятельство приводит к отражённым в данном соглашении правилам выбора параметров круглобриллианта. ■

Чтобы круглый бриллиант можно было получить из алмаза, он должен определённым образом вкладываться в этот алмаз. А именно, ось круглобриллианта должна составлять с какой-либо из кристаллографических осей алмаза угол, не превосходящий 12° . Данное требование вызвано технологическими ограничениями, обусловленными наличием в алмазе, так называемых, мягких и жёстких направлений. Чтобы смоделировать это требование поступим следующим образом. Во-первых, свяжем с каждой октаэдрической парой прямые, которые будем считать задающими *направления кристаллографических осей* этой пары. А, во-вторых, выделим среди вложений круглобриллиантов в пересечение тетраэдров, образующих октаэдрическую пару, такие которые назовём *допустимыми*.

Определение 12. Пусть $\{M; N\}$ – октаэдрическая пара, а (1) – ведущая к ней цепочка. Рассмотрим куб Q , которым индуцированы тетраэдры A_0 и B_0 из этой цепочки. Направления, задаваемые осями куба Q , назовём *направлениями кристаллографических осей* октаэдрической пары $\{M; N\}$. ■

Замечание. Вообще говоря, к одной и той же октаэдрической паре $\{M; N\}$ могут вести несколько разных цепочек вида (1). Однако в [3] установлен следующий факт. Между тремя прямыми, задающими направления кристаллографических осей пары $\{M; N\}$ при выборе одной цепочки, и тремя прямыми, задающими направления кристаллографических осей этой пары при выборе другой цепочки, можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие друг другу прямые параллельны или совпадают. Это означает, что определение 12 корректно – задаваемые с помощью этого определения направления кристаллографических осей октаэдрической пары не зависят от выбора ведущей к ней цепочки. ■

Определение 13. Пусть $\{M; N\}$ – октаэдрическая пара, а M^* и N^* – порождающие наборы входящих в эту пару правильных тетраэдров M и N . Вложение круглобриллианта (соответственно цилиндра) в пару $\{M; N\}$, назовём **допустимым**, если выполняются два условия. Во-первых, круглобриллиант (соответственно цилиндр) принадлежит пересечению собственных полупространств n -граней, входящих в объединение $M^* \cup N^*$. Во-вторых, ось круглобриллианта (соответственно цилиндра) составляет с какой-либо из кристаллографических осей пары $\{M; N\}$ угол, не превосходящий $\pi/15$ (т.е. 12°). ■

Замечание. Согласно лемме 4, первое условие из этого определения означает, что круглобриллиант (соответственно цилиндр) принадлежит пересечению тетраэдров M и N . ■

То, что одновременно с допустимыми вложениями круглобриллиантов вводятся допустимые вложения цилиндров, связано со следующим обстоятельством: рундист круглобриллианта представляет собой цилиндр, причём согласно сказанному в [2] и [3], имеет место такой факт.

Теорема 2. Для того, чтобы круглобриллиант был допустимо вложен в октаэдрическую пару необходимо и достаточно, чтобы в эту пару был допустимо вложен рундист круглобриллианта. ■

Данная теорема позволяет при моделировании вопросов, связанных с вложениями круглых бриллиантов в октаэдрические алмазы, перейти от допустимых вложений круглобриллиантов в октаэдрические пары к допустимым вложениям в такие пары цилиндров, т.е. существенно более простых фигур.

* * *

Приступим к изложению 3-го шага блок-схемы, изображённой на рис. 1. С каждым множеством точек свяжем n -границ, которые назовём **опорными** n -границами этого множества.

Определение 14. Назовём n -грань $\{\alpha; \vec{A}\}$ **опорной n -гранью** множества точек M , если: (а) M принадлежит собственному полупространству n -границы $\{\alpha; \vec{A}\}$; (б) на плоскости α имеются точки из M . ■

Замечание. Отметим связь понятия опорной n -грани с широко известным понятием опорной плоскости. Ясно, что если $\{\alpha; \vec{A}\}$ – опорная n -грань множества M , то α – опорная плоскость этого множества. Обратное, вообще говоря, неверно, так как M может лежать по любую сторону от своей опорной плоскости α , т.е. может принадлежать несобственному полупространству n -грани $\{\alpha; \vec{A}\}$. ■

Опираясь на понятие опорной n -грани, придадим удобную для дальнейшего использования формулировку следующему известному факту, обычно формулируемому в терминах опорных плоскостей.

Свойство 1. Если M – замкнутое ограниченное множество, а \vec{A} – ненулевой вектор, то существует ровно одна плоскость β такая, что пара $\{\beta; \vec{B}\}$, где векторы \vec{A} и \vec{B} положительно коллинеарны, является опорной n -гранью множества M . При этом в случае, когда M содержится в замыкании собственного полупространства какой-либо n -грани $\{\zeta; \vec{E}\}$, где \vec{E} положительно коллинеарен \vec{A} , плоскость ζ содержится в замыкании несобственного полупространства n -грани $\{\beta; \vec{B}\}$. ■

Как известно, линейные преобразования с ненулевым детерминантом сохраняют отношение принадлежности к множеству. Объединяя это обстоятельство со свойством 1, можно установить такой факт.

Лемма 5. Если M – замкнутое ограниченное множество, $\{\alpha; \vec{A}\}$ – его опорная n -грань, а f – евклидово преобразование, то: (а) $\{f(\alpha); f(\vec{A})\}$ – опорная n -грань множества $f(M)$; (б) всякая опорная n -грань $\{\beta; \vec{B}\}$ множества $f(M)$, в которой \vec{B} положительно коллинеарен $f(\vec{A})$, эквивалентна $\{f(\alpha); f(\vec{A})\}$. ■

Введём специальное отношение между наборами n -граней, которое назовём *параллельным вложением*.

Определение 15. Скажем, что набор n -граней A **параллельно вложен** в набор n -граней B , если для каждой n -грани $\{\alpha; \vec{V}\}$ из A в B найдётся n -грань $\{\beta; \vec{W}\}$ такая, что: (а) вектор \vec{V} положительно коллинеарен вектору \vec{W} ; (б) плоскость α принадлежит собственному полупространству n -грани $\{\beta; \vec{W}\}$. ■

Замечание. Обратим внимание, что условия, накладываемые в этом определении на n -грань $\{\beta; \vec{W}\}$, эквивалентны условию, состоящему в том, что собственное полупространство n -грани $\{\beta; \vec{W}\}$ содержит собственное полупространство n -грани $\{\alpha; \vec{V}\}$. ■

Распространим отношение *параллельного вложения* на октаэдрические пары.

Определение 16. Скажем, что октаэдрическая пара $\{M; N\}$ **параллельно вложена** в октаэдрическую пару $\{K; L\}$, если порождающий набор тетраэдра M параллельно вложен в порождающий набор одного из тетраэдров K и L , а порождающий набор тетраэдра N параллельно вложен в порождающий набор другого из тетраэдров K и L . ■

Пусть круглобриллиант D допустимо вложен в октаэдрическую пару $\{K; L\}$. Пользуясь свойством 1, заменим каждую n -грань $\{\alpha; \vec{V}\}$ из порождающих наборов тетра-

эдров K и L на опорную n -грань $\{\alpha^*; \overline{V}^*\}$ круглобриллианта D , где вектор \overline{V}^* положительно коллинеарен вектору \overline{V} (т.е. параллельно сдвинем n -грань $\{\alpha; \overline{V}\}$ внутрь её собственного полупространства до того момента, когда плоскость α коснётся круглобриллианта D). Получим новую октаэдрическую пару $\{M; N\}$, обладающую тремя свойствами. Во-первых, $\{M; N\}$ параллельно вложена в $\{K; L\}$; во-вторых, круглобриллиант D допустимо вложен в $\{M; N\}$; а в-третьих, каждая n -грань из порождающих наборов тетраэдров M и N является опорной n -гранью круглобриллианта D . Комбинации круглобриллианта с октаэдрической парой, которая обладает последними двумя свойствами, присвоим специальное наименование.

Определение 17. Комбинацию $\langle D; A \rangle$ круглобриллианта D с октаэдрической парой $A = \{M; N\}$, назовём *тесной моделью*, если: (а) D допустимо вложен в пару A ; (б) каждая n -грань из порождающих наборов тетраэдров M и N является опорной n -гранью D . ■

Отметим следующее полезное свойство тесных моделей, установленное в [2].

Теорема 3. Если $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, то пересечение тетраэдров, составляющих октаэдрическую пару A , представляет собой октаэдрический многогранник (т.е. эти тетраэдры являются компонентами октаэдрического многогранника). ■

Из рассуждения, предшествующего определению тесной модели, вытекает, что имеет место такой факт.

Теорема 4. Круглобриллиант D допустимо вкладывается в октаэдрическую пару A тогда и только тогда, когда имеется тесная модель $\langle D; B \rangle$, удовлетворяющая условию: октаэдрическая пара B параллельно вкладывается в октаэдрическую пару A . ■

Данная теорема позволяет при моделировании вопросов, связанных с вложениями круглых бриллиантов в октаэдрические алмазы перейти от рассмотрения допустимых вложений круглобриллиантов в октаэдрические пары к рассмотрению параллельных вложений октаэдрических пар из тесных моделей в произвольные октаэдрические пары. Перед тем, как объяснять смысл такого перехода, обратим внимание на следующий факт, установленный в [3].

Теорема 5. Пусть $\{T_1; T_2\}$ – октаэдрическая пара. Тогда: (а) пересечение $T_1 \cap T_2$ имеет непустую внутренность; (б) порождающие наборы Q_1 и Q_2 тетраэдров T_1 и T_2 можно так взаимно-однозначно сопоставить друг другу, что векторы \overline{N}_1 и \overline{N}_2 из сопоставленных друг другу n -граней $\{\alpha_1; \overline{N}_1\} \in Q_1$ и $\{\alpha_2; \overline{N}_2\} \in Q_2$ будут отрицательно коллинеарны. ■

Пользуясь этой теоремой, свяжем с каждой октаэдрической парой шестимерный вектор, который назовём *профилем* данной пары.

Определение 18. Пусть $\{T_1; T_2\}$ – октаэдрическая пара, а $\{\{\alpha_{1,1}; \overline{N}_{1,1}\}, \dots, \{\alpha_{1,4}; \overline{N}_{1,4}\}\}$ и $\{\{\alpha_{2,1}; \overline{N}_{2,1}\}, \dots, \{\alpha_{2,4}; \overline{N}_{2,4}\}\}$ – порождающие наборы правильных тетраэдров T_1 и T_2 , выписанные таким образом, что вектор $\overline{N}_{1,j}$ отрицательно коллинеарен век-

тору $\overline{N_{2,j}}$, $j = 1, \dots, 4$. Назовём **профилем** октаэдрической пары $\{T_1; T_2\}$ 6-мерный вектор $(d_1; \dots; d_4; h_1; h_2)$, где d_1, \dots, d_4 – выписанные в порядке неубывания расстояния между плоскостями α_{1j} и α_{2j} , $j = 1, \dots, 4$, а h_1 и h_2 – выписанные в порядке неубывания высоты правильных тетраэдров T_1 и T_2 . ■

Замечание. Заметим, что профиль октаэдрической пары не меняется при зеркальном отражении. Поэтому профиль характеризует октаэдрическую пару не однозначно, а с точностью до зеркального отражения. ■

Согласно определению 5 октаэдрический многогранник является восьмигранником. Исходя из этого, можно установить такое свойство профилей октаэдрических пар.

Лемма 6. Пусть $\{T_1; T_2\}$ – октаэдрическая пара, а $(d_1; \dots; d_4; h_1; h_2)$ – её профиль. Если пересечение $T_1 \cap T_2$ представляет собой октаэдрический многогранник, то $d_1 < h_1$. ■

В [1] установлена следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $A = \{K; L\}$ и $B = \{M; N\}$ – октаэдрические пары, а $(a_1; \dots, a_4; k; l)$ и $(b_1; \dots; b_4; m; n)$ – их профили. Рассмотрим зеркальное отражение B^* пары B . Для того чтобы хотя бы одна из пар B или B^* параллельно вкладывалась в пару A , необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$b_1 \leq a_1, \dots, b_4 \leq a_4, \quad m \leq k, \quad n \leq l. \quad \blacksquare$$

Не слишком сложно понять, что зеркальное отражение переводит тесную модель в тесную модель, причём круглобриллиант из отражённой модели равен круглобриллианту из исходной. Совместно с теоремами 4 и 6 это сводит вопрос о возможности допустимого вложения круглобриллианта в октаэдрическую пару к сравнению линейных параметров этой октаэдрической пары с линейными параметрами октаэдрических пар из тесных моделей. Данное обстоятельство является одной из причин, вследствие которых выгодно перейти от рассмотрения допустимых вложений круглых бриллиантов в октаэдрические пары к рассмотрению параллельных вложений октаэдрических пар из тесных моделей в произвольные октаэдрические пары. Ещё одна причина связана со следующим утверждением, установленным в [3].

Теорема 7. Чтобы комбинация $\langle D; A \rangle$ круглобриллианта D с октаэдрической парой $A = \{M; N\}$, являлась тесной моделью необходимо и достаточно выполнения двух условий: (а) рундист круглобриллианта D допустимо вложен в пару A ; (б) каждая n -грань из порождающих наборов тетраэдров M и N является опорной n -гранью рундиста круглобриллианта D . ■

Данная теорема позволяет при вычислении линейных параметров октаэдрических пар из тесных моделей перейти от использования круглобриллиантов к использованию цилиндров, т.е. к использованию существенно более простых фигур, что, в свою очередь, позволяет построить относительно простой алгоритм вычисления линейных параметров октаэдрических пар из тесных моделей (см. [3]).

2. ОВАЛИЗОВАННЫЕ ОКТАЭДРИЧЕСКИЕ АЛМАЗЫ

Цель настоящей работы – распространение методов, предложенных в [3] для множества октаэдрических алмазов, на более широкое множество алмазов. Алмазы, составляющие это более широкое множество, назовём **овализованными** октаэдрическими алмазами. Такие алмазы можно получить из октаэдрических путём «скругления» (срезания или скалывания) вершин и некоторых рёбер. Чтобы облегчить чтение, разобьём строгое описание **овализованных** октаэдрических алмазов на два шага.

На первом шаге введём понятие *двугранного угла* октаэдрической пары. На втором шаге дадим определение **овализованных** октаэдрических алмазов. Для наглядности изобразим последовательность указанных шагов в виде блок-схемы (рис. 10).

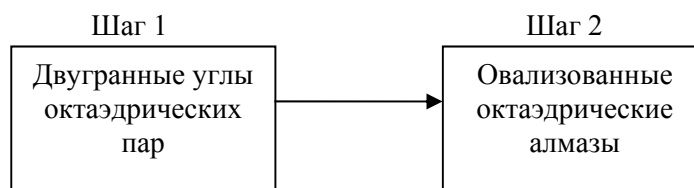


Рис. 10

Приступим к изложению первого шага данной блок-схемы. Обратим внимание на такую лемму, вытекающую из теоремы 5.

Лемма 7. Если $\{T_1; T_2\}$ – октаэдрическая пара, то порождающие наборы U_1 и U_2 тетраэдров T_1 и T_2 удовлетворяют трём условиям: (а) в $U_1 \cup U_2$ нет двух n -граней, содержащих одну и ту же плоскость; (б) в $U_1 \cup U_2$ нет двух n -граней, содержащих положительно коллинеарные векторы, (в) плоскость из n -границы, входящей в один из наборов U_1 или U_2 , пересекается с плоскостями ровно из трёх n -граней, входящих в другой из наборов U_1 или U_2 . ■

Как известно, пересечение выпуклых фигур – выпукло. Совместно с первым утверждением леммы 7 это обосновывает следующее утверждение.

Лемма 8. Если $\{T_1; T_2\}$ – октаэдрическая пара, а U – объединение порождающих наборов тетраэдров T_1 и T_2 , то $T_1 \cap T_2$ представляет собой невырожденный выпуклый многогранник, для каждой грани которого в U имеется ровно одна n -грань, плоскость которой содержит эту грань. ■

Чуть более сложно устанавливается такая лемма.

Лемма 9. Если $\{T_1; T_2\}$ – октаэдрическая пара, а U – объединение порождающих наборов тетраэдров T_1 и T_2 , то в U нет трёх n -граней, плоскости из которых пересекаются по одной прямой.

Доказательство. Допустим противное. Пусть в U имеются n -границы $\{\alpha_1; \overline{N_1}\}$, $\{\alpha_2; \overline{N_2}\}$, $\{\alpha_3; \overline{N_3}\}$ такие, что плоскости α_1 , α_2 и α_3 пересекаются по прямой l . Ввиду первого утверждения теоремы 5 тетраэдры T_1 и T_2 невырожденные. Но пересечением трёх плоскостей, содержащих три грани невырожденного тетраэдра, является не прямая, а точ-

ка. Это позволяет без нарушения общности считать, что $\{\alpha_1; \overline{N}_1\}$ и $\{\alpha_2; \overline{N}_2\}$ принадлежат порождающему набору тетраэдра T_1 , а $\{\alpha_3; \overline{N}_3\}$ – порождающему набору тетраэдра T_2 . Но любое ребро тетраэдра пересекается со всеми его гранями. Следовательно, прямая l пересекается со всеми гранями тетраэдра T_1 . Совместно с первым утверждением леммы 7 это означает, что вектор \overline{N}_3 не может быть коллинеарен (положительно или отрицательно) никакому вектору, входящему в порождающий набор тетраэдра T_1 . Но это противоречит второму утверждению теоремы 5. ■

Совместно с первыми двумя утверждениями леммы 7 данная лемма обосновывает корректность следующего определения.

Определение 19. Пусть $\{M; N\}$ – октаэдрическая пара, а U_M и U_N – порождающие наборы тетраэдров M и N . Двугранный угол ϑ назовём **двугранным углом пары $\{M; N\}$** , если в $U_M \cup U_N$ имеются n -грани $\{\alpha; \overline{V}\}$ и $\{\beta; \overline{W}\}$, пересечением собственных полупространств которых является ϑ (т.е. если в $U_M \cup U_N$ имеются n -грани $\{\alpha; \overline{V}\}$ и $\{\beta; \overline{W}\}$, образующие порождающий набор угла ϑ). Двугранный угол ϑ пары $\{T_1; T_2\}$ назовём **унарным**, если $\{\alpha; \overline{V}\}$ и $\{\beta; \overline{W}\}$ принадлежат одному и тому же из наборов U_M и U_N . Двугранный угол ϑ пары $\{T_1; T_2\}$ назовём **бинарным**, если $\{\alpha; \overline{V}\}$ принадлежит одному из наборов U_M и U_N , а $\{\beta; \overline{W}\}$ – другому. ■

Из последнего утверждения леммы 7 вытекает такая оценка количества двугранных углов октаэдрической пары.

Лемма 10. У любой октаэдрической пары имеется ровно 12 унарных двугранных углов и ровно 12 бинарных двугранных углов. ■

Из леммы 9 вытекает ещё одно свойство двугранных углов октаэдрических пар.

Лемма 11. Среди двугранных углов октаэдрической пары $\{T_1; T_2\}$ нет таких, рёбра которых совпадают. ■

Объединяя эту лемму с леммой 8, получаем следующее утверждение.

Лемма 12. Если $\{T_1; T_2\}$ – октаэдрическая пара, то любое ребро многогранника $T_1 \cap T_2$ лежит на ребре ровно одного из двугранных углов пары $\{T_1; T_2\}$. ■

Замечание. Обратное, вообще говоря, неверно. Среди двугранных углов октаэдрической пары $\{T_1; T_2\}$ могут быть такие, рёбра которых не содержат рёбер многогранника $T_1 \cap T_2$. Так если T_1 и T_2 являются тетраэдрами, индуцированными одним и тем же кубом, то все ребра правильного октаэдра $T_1 \cap T_2$ лежат на рёбрах бинарных углов пары $\{T_1; T_2\}$ (см. рис. 3 – рис. 5). ■

Отметим также свойство вершин многогранника, являющегося пересечением тетраэдров, образующих октаэдрическую пару

Лемма 13. Если $\{T_1; T_2\}$ – октаэдрическая пара, то для любой вершины V многогранника $T_1 \cap T_2$ среди унарных двугранных углов пары $\{T_1; T_2\}$ найдется, хотя бы один, ребру которого принадлежит V .

Доказательство. Пусть U_1 и U_2 – порождающие наборы тетраэдров T_1 и T_2 . Так как B – вершина многогранника $T_1 \cap T_2$, то B – общая точка, по крайней мере, трёх граней G_1, G_2, G_3 этого многогранника. В силу леммы 8 в $U_1 \cup U_2$ однозначно выделяются три н-грани $\{\alpha_1; \overline{N}_1\}$, $\{\alpha_2; \overline{N}_2\}$ и $\{\alpha_3; \overline{N}_3\}$, плоскости из которых содержат соответственно G_1, G_2 и G_3 . Но, по крайней мере, две из этих н-граней должны принадлежать одному и тому же из наборов U_1 и U_2 , что даёт доказываемую лемму. ■

В дальнейшем при рассмотрении двугранных углов октаэдрических пар, входящих в тесные модели, будет использоваться такая упрощённая терминология.

Определение 20. Двугранные углы октаэдрической пары B , входящей в тесную модель $\langle D; B \rangle$, будем для краткости называть *двугранными углами модели $\langle D; B \rangle$* . ■

* * *

Перейдём к изложению второго шага блок-схемы, изображённой на рис. 10. Начнём с того, что свяжем с каждым двугранным углом плоскость, которую назовём *столешницей* данного двугранного угла.

Определение 21. Рассмотрим двугранный угол \mathfrak{A} , порождающий набор которого состоит из н-граней $\{\alpha; \overline{V}\}$ и $\{\beta; \overline{W}\}$. Назовем н-грань $\{\sigma; \overline{A}\}$ *столешницей угла \mathfrak{A}* , если выполняются два условия: во-первых, плоскость σ пересекается с углом \mathfrak{A} , а во-вторых, вектор \overline{A} положительно коллинеарен вектору $\overline{N} = \overline{V}/|\overline{V}| + \overline{W}/|\overline{W}|$. ■

Можно показать, что столешницы двугранных углов обладают такими свойствами.

Лемма 14. Если $\{\sigma; \overline{A}\}$ – столешница двугранного угла \mathfrak{A} , то: (а) плоскость σ , либо содержит ребро угла \mathfrak{A} , либо параллельна его ребру, (б) плоскость σ перпендикулярна биссектральной полуплоскости угла \mathfrak{A} (т.е. полуплоскости, которая принадлежит углу \mathfrak{A} , ограничена ребром этого угла и обладает тем свойством, что каждая её точка равноудалена от обеих граней угла). ■

Первое утверждение леммы 14 позволяет задать на столешницах двугранных углов числовую функцию.

Определение 22. Назовём *глубиной* столешницы $\{\sigma; \overline{A}\}$ двугранного угла \mathfrak{A} расстояние от ребра этого угла до плоскости σ . ■

Можно показать, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 15. Собственное полупространство столешницы $\{\sigma; \overline{A}\}$ двугранного угла \mathfrak{A} содержит этот угол тогда и только тогда, когда глубина столешницы равна нулю. ■

Сопоставляя эту лемму со свойством 1, получаем ещё один факт, касающийся столешниц двугранных углов.

Лемма 16. Если M – замкнутое ограниченное множество, а \mathfrak{A} – содержащий это множество двугранный угол, то существуют столешницы угла \mathfrak{A} , являющиеся опорными н-гранями множества M . При этом все такие столешницы представляют собой эквивалентные друг другу н-грани. ■

Напомним, что линейное преобразование называется евклидовым, если оно сохраняет углы и длины. Ясно, что евклидовы преобразования переводят столешницы двугранных углов в столешницы их образов, сохраняя при этом глубину столешниц. Для удобства дальнейших ссылок оформим это обстоятельство в виде леммы.

Лемма 17. Если $\{\sigma; \bar{A}\}$ – столешница глубины g двугранного угла ϑ , а f – евклидово преобразование, то $\{f(\sigma); f(\bar{A})\}$ – столешница глубины g двугранного угла $f(\vartheta)$. ■

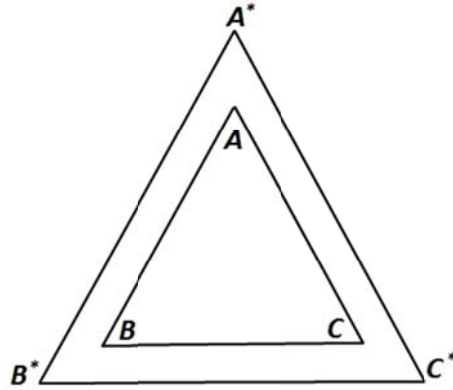


Рис. 11

Для удобства дальнейших ссылок оформим в виде леммы еще одно очевидное утверждение.

Лемма 18. Рассмотрим правильный треугольник $A^*B^*C^*$ и правильный треугольник ABC , который получается из $A^*B^*C^*$ путём сдвига его сторон вовнутрь (рис. 11). Если все стороны треугольника $A^*B^*C^*$ сдвигаются на одно и то же расстояние h , то расстояние от вершин A^* , B^* и C^* соответственно до вершин A , B и C больше, чем h . ■

Обратим внимание также на следующий факт.

Лемма 19. Пусть $ABCD$ – правильный тетраэдр, а $\{\lambda; \bar{L}\}$ – столешница того из его двугранных углов, ребром которого является AB (рис. 12). Если P , K , T и N – точки пересечения плоскости λ соответственно с рёбрами AD , BD , BC и AC , то прямые PK и NT удалены от ребра AB на то же расстояние, на которое прямые NP и KT удалены от вершин A и B .

Доказательство. Достаточно заметить, что все грани тетраэдра образуют с прямой EF , соединяющей середины рёбер AB и CD , один и тот же угол. ■

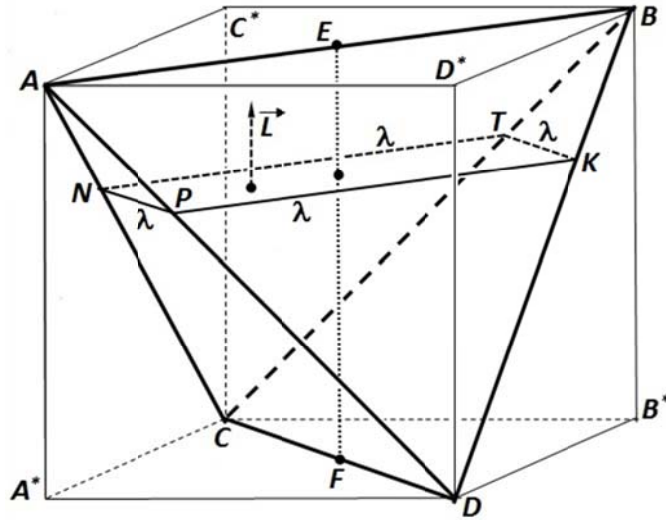


Рис. 12

Договоримся о такой терминологии.

Определение 23. Пусть $\Xi = \{\{\alpha_1; \overline{A}_1\}, \dots, \{\alpha_4; \overline{A}_4\}\}$ – порождающий набор правильного тетраэдра U . Предположим, \mathfrak{S}_{ij} – двугранный угол, порождающий набор которого состоит из n -граней $\{\alpha_i; \overline{A}_i\}$ и $\{\alpha_j; \overline{A}_j\}$, $i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4, i \neq j$. Свяжем с углом \mathfrak{S}_{ij} его столешницу $\{\lambda_{ij}; \overline{L}_{ij}\}$ глубины g , $i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4, i \neq j$. Добавим столешницы $\{\lambda_{ij}; \overline{L}_{ij}\}$ к набору Ξ , $i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4, i \neq j$. Получим некоторый новый набор Ξ^* . Рассмотрим многогранник U^* , порождающим набором которого будет Ξ^* . Назовём U^* **g -обрезанием** тетраэдра U . ■

Учитывая леммы 18 и 19, можно показать, что в случае, когда g меньше половины длины отрезка, соединяющего середины скрещивающихся рёбер тетраэдра (т.е. ребер, лежащих на непересекающихся прямых), его g -обрезание имеет следующий вид.

Лемма 20. Пусть A^* является g -обрезанием правильного тетраэдра A . Если g меньше половины длины отрезка, соединяющего середины скрещивающихся рёбер тетраэдра A , то (а) A^* – лежащий внутри A непустой десятигранник; (б) четыре грани десятигранника A^* – треугольники, лежащие на гранях тетраэдра A ; (в) шесть граней десятигранника A^* – шестиугольники, параллельные рёбрам тетраэдра A ; (г) все вершины тетраэдра A лежат вне десятигранника A^* (см. рис. 13, где изображен десятигранник A^* , чтобы не загромождать рисунок, изображение тетраэдра опущено). ■

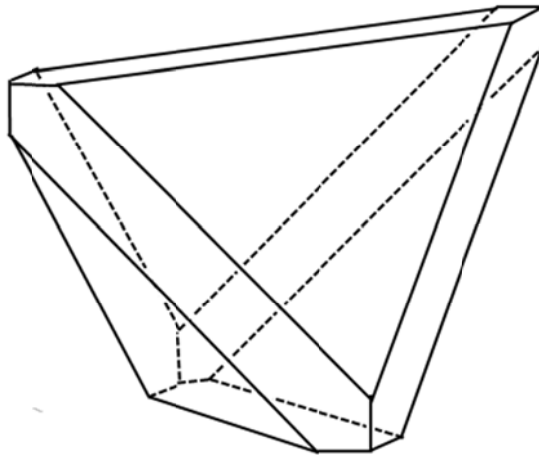


Рис. 13

В связи с этой леммой отметим следующее свойство правильных тетраэдров, которое можно получить с помощью не слишком сложных вычислений.

Лемма 21. Половина длины отрезка, соединяющего середины скрещивающихся рёбер правильного тетраэдра составляет более 20% высоты этого тетраэдра. ■

Введём ещё одно понятие.

Определение 24. Круглобриллиант D назовём ε -оптимальным круглобриллиантом октаэдрической пары $\{A; B\}$, если: (а) D допустимо вкладывается в $\{A; B\}$; (б) вес D отличается не более, чем на ε от верхней границы весов круглобриллиантов, допустимо вкладываемых в $\{A; B\}$. ■

Опираясь на понятие g -обрезания правильного тетраэдра и понятие ε -оптимального круглобриллианта, введём понятие ε -обрезания октаэдрических пар.

Определение 25. Пусть $\{A; B\}$ – октаэдрическая пара, а g – число, определяемое по формуле $g = 0,2 \cdot R$, где R – радиус ε -оптимального круглобриллианта пары $\{A; B\}$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим g -обрезания A^* и B^* тетраэдров A и B . Назовём пару $\{A^*; B^*\}$ ε -обрезанием октаэдрической пары $\{A; B\}$. ■

Из замечания к теореме 10 будет следовать, что имеет место такое утверждение.

Теорема 8. Пусть $\{A; B\}$ – октаэдрическая пара, а $\{A^*; B^*\}$ – её ε -обрезание, $\varepsilon > 0$. Если $A \cap B$ – октаэдрический многогранник, то $A^* \cap B^*$ – непустой многогранник, вложенный в $A \cap B$. ■

Обратим внимание ещё на один факт, который будет установлен ниже (см. конец первого шага пункта 3).

Лемма 22. Если $\{T_1; T_2\}$ – октаэдрическая пара, а V – ребро многогранника $T_1 \cap T_2$, то двугранный угол ϑ , образуемый инцидентными этому ребру гранями G_1 и G_2 многогранника $T_1 \cap T_2$, удовлетворяет условиям: (а) ϑ является острым, если G_1 и G_2 лежат на гранях унарного угла пары $\{A; B\}$; (б) ϑ является тупым, если G_1 и G_2 лежат на гранях бинарного угла пары $\{A; B\}$. ■

Совместно леммой 13 данная лемма позволяет дополнить теорему 8.

Теорема 9. Если $\{A; B\}$ – октаэдрическая пара, а $\{A^*; B^*\}$ – её ε -обрезание, $\varepsilon > 0$, то многогранник $A^* \cap B^*$ не содержит (а) ни одной вершины многогранника $A \cap B$; (б) ни одного из тех рёбер многогранника $A \cap B$, которым инцидентны грани, образующие острый двугранный угол. ■

Пользуясь теоремой 8, введём понятие ε -овализованного октаэдрического многогранника.

Определение 26. Пусть $\{A; B\}$ – октаэдрическая пара, а $\{A^*; B^*\}$ – её ε -обрезание. Рассмотрим многогранник $A \cap B$ и вложенный в него многогранник $A^* \cap B^*$. Фигуру F назовём **ε -овализованным** октаэдрическим многогранником, $\varepsilon > 0$, если выполняются два условия: (а) $A \cap B$ представляет собой октаэдрический многогранник; (б) F удовлетворяет включениям $A^* \cap B^* \subseteq F \subseteq A \cap B$. Пары $\{A; B\}$ и $\{A^*; B^*\}$ назовём **внутренним** и **внешним каркасами** овализованного октаэдрического многогранника F . ■

В дальнейшем будут использоваться также следующие понятия.

Определение 27. Скажем, что круглобриллиант D **допустимо вложен** в ε -овализованный октаэдрический многогранник F , $\varepsilon > 0$, если (а) $D \subseteq F$; (б) F допустимо вложен во внешний каркас многогранника F . ■

Оставшаяся часть работы посвящена установлению следующего факта.

Теорема 10. Если круглобриллиант D является ε -оптимальным для внешнего каркаса ε -овализованного октаэдрического многогранника F , $\varepsilon > 0$, то существует допустимое вложение V круглобриллианта D в этот внешний каркас, при котором D вложен в F .

Замечание 1. Найти вложение V можно, например, с помощью алгоритма, изложенного в [3]. ■

Замечание 2. Заметим, что теорема 8 является следствием теоремы 10, поэтому доказав теорему 10, тем самым обоснуем теорему 8. ■

Данная теорема показывает, что изложенный в [3] алгоритм, предназначенный для октаэдрических многогранников, может использоваться также для овализованных октаэдрических многогранников.

Объединяя теоремы 8 и 10, получаем важный для практики факт.

Теорема 11. Дефекты октаэдрического алмаза, расположенные вблизи его вершин и вблизи тех его рёбер, которым инцидентны грани, образующие острый двугранный угол, не снижают веса максимального круглого бриллианта, который может быть получен из алмаза, т.е. фактически не снижают стоимости алмаза. ■

Обратим внимание на следующий недостаток теоремы 10: для того, чтобы выяснить, является ли имеющийся кристалл алмаза ε -овализованным, необходимо сначала найти радиус ε -оптимального круглобриллианта внешнего каркаса этого алмаза. Преодолеть указанный недостаток помогает одна особенность изложенного в [3] алгоритма.

Теорема 12. Пусть $\{A; B\}$ – октаэдрическая пара, а $(d_1; \dots; d_4; h_1; h_2)$ – её профиль. Радиус любого круглобриллианта, вложение которого в пару $\{A; B\}$ может выдать изложенный в [3] алгоритм, является не меньшим, чем $\min(d_1/1, 4887; h_1/2, 9774)$.

В связи с этой теоремой договоримся о следующей терминологии.

Определение 28. Пусть $\{A; B\}$ – октаэдрическая пара, $(d_1; \dots; d_4; h_1; h_2)$ – её профиль, а g – число, определяемое по формуле $g = 0,2 \cdot \min(d_1/1, 4887; h_1/2, 9774)$. Рассмотрим g -обрезания A^* и B^* тетраэдров A и B . Назовём пару $\{A^*; B^*\}$ **минорным обрезанием** октаэдрической пары $\{A; B\}$. ■

Определение 29. Пусть $\{A; B\}$ – октаэдрическая пара, а $\{A^*; B^*\}$ – её минорное ε -обрезание. Рассмотрим многогранник $A \cap B$ и вложенный в него многогранник $A^* \cap B^*$. Фигуру F назовём **минорно овализованным** октаэдрическим многогранником, если выполняются два условия: (а) $A \cap B$ представляет собой октаэдрический многогранник; (б) F удовлетворяет включениям $A^* \cap B^* \subseteq F \subseteq A \cap B$. Пары $\{A; B\}$ и $\{A^*; B^*\}$ назовём **внутренним** и **внешним каркасами** минорно овализованного октаэдрического многогранника F . ■

Из теоремы 12 вытекает, что любой минорно овализованный октаэдрический многогранник является ε -овализованным октаэдрическим многогранником, $\varepsilon > 0$. Это позволяет избавиться от указанного выше недостатка теоремы 10, заменив её на более удобное утверждение.

Теорема 13. Если круглобриллиант D является ε -оптимальным для внешнего каркаса минорно овализованного октаэдрического многогранника F , $\varepsilon > 0$, то существует допустимое вложение D в этот внешний каркас, при котором D вложен в F , причём найти такое вложение можно с помощью алгоритма, изложенного в [3]. ■

3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, СВЯЗАННЫЕ С ТЕСНЫМИ МОДЕЛЯМИ

В этом пункте с каждой тесной моделью свяжем три декартовых системы координат, которые назовём *кристаллографической*, *паллиативной* и *бриллиантовой* системами координат этой модели. Чтобы облегчить чтение, разобьём введение этих систем координат на четыре шага. На первом шаге определим *кристаллографические* системы координат тесных моделей. На втором шаге введём *паллиативные* системы координат тесных моделей. На третьем шаге свяжем с каждым вектором, выходящим из начала правой декартовой системы координат, угол, который назовём углом *отворота* этого вектора. На четвёртом шаге, используя понятие угла *отворота*, введём *бриллиантовые* системы координат тесных моделей. Для наглядности изобразим последовательность указанных шагов в виде блок-схемы (рис. 14).

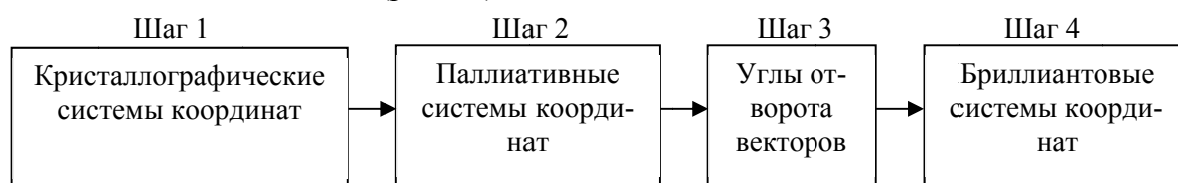


Рис. 14

Приступим к изложению первого шага данной блок-схемы. Не слишком трудно увидеть, что имеют место следующие два факта.

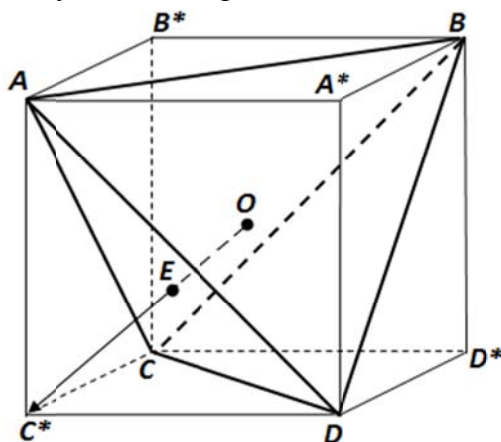


Рис. 15

Лемма 23. Если T_1 и T_2 – два тетраэдра индуцированных кубом Q , то (а) каждая грань любого из тетраэдров T_1 и T_2 отсекает от куба Q ровно одну его вершину, причём вершина куба, отсекаемая гранью одного тетраэдра является вершиной другого тетраэдра; (б) в каждой паре вершин куба Q , симметричных относительно его центра, одна является вершиной тетраэдра T_1 , а другая – вершиной тетраэдра T_2 . ■

Лемма 24. Если G – грань тетраэдра, индуцированного кубом Q , то направляющий вектор луча, идущего из центра куба Q в его вершину, отсекаемую гранью G , положительно коллинеарен внешней нормали грани G . ■

Замечание. Чтобы придать данным леммам наглядность, рассмотрим для примера грань ADC тетраэдра $ABDC$ индуцированного кубом $AB^*BA^*DC^*CD^*$ (рис. 15). Эта грань отсекает от куба вершину C^* . При этом направляющий вектор луча OC^* положительно коллинеарен вектору $\overrightarrow{EC^*}$, являющемуся внешней нормалью грани ADC . ■

Сопоставляя данные леммы с определением направлений кристаллографических осей октаэдрической пары (определение 12) получаем такое утверждение.

Лемма 25. Пусть $\{M; N\}$ – октаэдрическая пара, в которой тетраэдры M и N , индуцированы одним и тем же кубом. Рассмотрим декартову систему координат $OXYZ$, оси которой можно принять в качестве прямых, задающих направления кристаллографических осей пары $\{M; N\}$. Если $\overrightarrow{E_X}$, $\overrightarrow{E_Y}$ и $\overrightarrow{E_Z}$ – единичные направляющие векторы осей системы координат $OXYZ$, то векторы, входящие в n -грани порождающего набора одного из тетраэдров M и N , положительно коллинеарны векторам

$$\overrightarrow{E_X} + \overrightarrow{E_Y} + \overrightarrow{E_Z}, \quad \overrightarrow{E_X} - \overrightarrow{E_Y} - \overrightarrow{E_Z}, \quad -\overrightarrow{E_X} - \overrightarrow{E_Y} + \overrightarrow{E_Z}, \quad -\overrightarrow{E_X} + \overrightarrow{E_Y} - \overrightarrow{E_Z},$$

а векторы, входящие в n -грани порождающего набора другого из тетраэдров M и N , положительно коллинеарны векторам

$$\overrightarrow{E_X} + \overrightarrow{E_Y} - \overrightarrow{E_Z}, \quad \overrightarrow{E_X} - \overrightarrow{E_Y} + \overrightarrow{E_Z}, \quad -\overrightarrow{E_X} - \overrightarrow{E_Y} - \overrightarrow{E_Z}, \quad -\overrightarrow{E_X} + \overrightarrow{E_Y} + \overrightarrow{E_Z}. \quad \blacksquare$$

Как известно, при параллельных сдвигах углы не изменяются. Совместно с определением октаэдрической пары это даёт следующее обобщение данной леммы.

Лемма 26. Пусть $\{M; N\}$ – произвольная октаэдрическая пара (т.е. пара, в которой тетраэдры M и N не обязательно индуцированы одним и тем же кубом). Рассмотрим декартову систему координат $OXYZ$, оси которой можно принять в качестве прямых, задающих направления кристаллографических осей пары $\{M; N\}$. Если $\overrightarrow{E_X}$, $\overrightarrow{E_Y}$ и $\overrightarrow{E_Z}$ – единичные направляющие векторы осей системы координат $OXYZ$, то векторы, входящие в n -грани порождающего набора одного из тетраэдров M и N , положительно коллинеарны векторам

$$\overrightarrow{E_X} + \overrightarrow{E_Y} + \overrightarrow{E_Z}, \quad \overrightarrow{E_X} - \overrightarrow{E_Y} - \overrightarrow{E_Z}, \quad -\overrightarrow{E_X} - \overrightarrow{E_Y} + \overrightarrow{E_Z}, \quad -\overrightarrow{E_X} + \overrightarrow{E_Y} - \overrightarrow{E_Z},$$

а векторы, входящие в n -грани порождающего набора другого из тетраэдров M и N , положительно коллинеарны векторам

$$\overrightarrow{E_X} + \overrightarrow{E_Y} - \overrightarrow{E_Z}, \quad \overrightarrow{E_X} - \overrightarrow{E_Y} + \overrightarrow{E_Z}, \quad -\overrightarrow{E_X} - \overrightarrow{E_Y} - \overrightarrow{E_Z}, \quad -\overrightarrow{E_X} + \overrightarrow{E_Y} + \overrightarrow{E_Z}. \quad \blacksquare$$

Свяжем с каждой тесной моделью правую декартову систему координат, которую назовём *кристаллографической*.

Определение 30. Правоориентированную декартову систему координат $OXYZ$ назовём *кристаллографической* системой координат тесной модели $\langle D; A \rangle$, если (а) начало O системы координат $OXYZ$ совпадает с центром рундиста круглобриллианта D ; (б) оси системы координат $OXYZ$ можно принять в качестве прямых, задающих направления кристаллографических осей октаэдрической пары A ; (в) направляющий вектор оси круглобриллианта D (напомним, что эта ось считается ориентированной по направлению

от шипа к шапке) составляет с направляющим вектором оси OZ системы координат $OXYZ$ угол, не превосходящий $\pi/15$ (т.е. 12°). ■

Из леммы 26 вытекает такое свойство кристаллографических систем координат.

Теорема 14. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, в которой октаэдрическая пара A состоит из тетраэдров M и N . Если \vec{E}_X , \vec{E}_Y и \vec{E}_Z – единичные направляющие векторы осей кристаллографической системы координат $OXYZ$ модели $\langle D; A \rangle$, то векторы, входящие в n -грани порождающего набора одного из тетраэдров M и N , положительно коллинеарны векторам

$$\vec{E}_X + \vec{E}_Y + \vec{E}_Z, \quad \vec{E}_X - \vec{E}_Y - \vec{E}_Z, \quad -\vec{E}_X - \vec{E}_Y + \vec{E}_Z, \quad -\vec{E}_X + \vec{E}_Y - \vec{E}_Z, \quad (2)$$

а векторы, входящие в n -грани порождающего набора другого из тетраэдров M и N , положительно коллинеарны векторам

$$-\vec{E}_X - \vec{E}_Y - \vec{E}_Z, \quad -\vec{E}_X + \vec{E}_Y + \vec{E}_Z, \quad \vec{E}_X + \vec{E}_Y - \vec{E}_Z, \quad \vec{E}_X - \vec{E}_Y + \vec{E}_Z. \quad \blacksquare \quad (3)$$

В конце пункта 2 была сформулирована лемма 22, обоснование которой было обещано привести позже. Приведём доказательство этой леммы (для удобства читателя повторим её формулировку).

Лемма 22. Если $\{T_1; T_2\}$ – октаэдрическая пара, а V – ребро многогранника $T_1 \cap T_2$, то двугранный угол ϑ , образуемый инцидентными этому ребру гранями G_1 и G_2 многогранника $T_1 \cap T_2$, удовлетворяет условиям: (а) ϑ является острым, если G_1 и G_2 лежат на гранях унарного угла пары $\{A; B\}$; (б) ϑ является тупым, если G_1 и G_2 лежат на гранях бинарного угла пары $\{A; B\}$.

Доказательство. Вычислив скалярное произведение каждой пары векторов из (2) и каждой пары векторов из (3), получаем в силу леммы 2 первое утверждение доказываемой леммы. Вычислив скалярные произведения пар неколлинеарных векторов, один из которых принадлежит (2), а другой – (3), получаем второе утверждение доказываемой леммы. ■

* * *

Перейдём к изложению второго шага блок-схемы, изображённой на рис. 14.

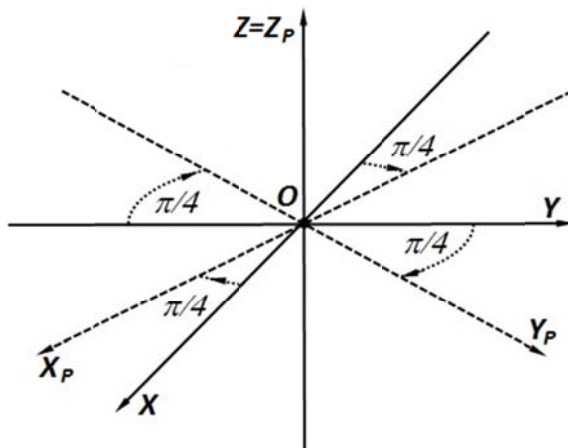


Рис. 16

Определение 31. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, а $OXYZ$ – её кристаллографическая система координат. Рассмотрим декартову систему координат $OX_P Y_P Z_P$, которая получится из системы $OXYZ$ в результате её поворота вокруг оси OZ на угол $\pi/4$ против хода часовой стрелки, если смотреть по направлению оси OZ (рис. 16). Назовём систему координат $OX_P Y_P Z_P$ *паллиативной* системой координат тесной модели $\langle D; A \rangle$. ■

Очевидна следующая лемма.

Лемма 27. Если $\overrightarrow{E_X}, \overrightarrow{E_Y}, \overrightarrow{E_Z}$ – единичные направляющие векторы осей кристаллографической системы координат $OXYZ$ тесной модели $\langle D; A \rangle$, а $\overrightarrow{E_X^P}, \overrightarrow{E_Y^P}, \overrightarrow{E_Z^P}$ – единичные направляющие векторы осей её паллиативной системы координат $OX_P Y_P Z_P$, то

$$\overrightarrow{E_X} = (\overrightarrow{E_X^P} + \overrightarrow{E_Y^P})/\sqrt{2}, \quad \overrightarrow{E_Y} = (-\overrightarrow{E_X^P} + \overrightarrow{E_Y^P})/\sqrt{2}, \quad \overrightarrow{E_Z} = \overrightarrow{E_Z^P}. \quad \blacksquare$$

Сопоставляя данную лемму с теоремой 14, получаем такой факт.

Теорема 15. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, в которой октаэдрическая пара A состоит из тетраэдров M и N . Если $\overrightarrow{E_X^P}, \overrightarrow{E_Y^P}, \overrightarrow{E_Z^P}$ – единичные направляющие векторы осей паллиативной системы координат модели $\langle D; A \rangle$, то векторы, входящие в н-грани порождающего набора одного из тетраэдров M и N , положительно коллинеарны векторам

$$\sqrt{2} \cdot \overrightarrow{E_Y^P} + \overrightarrow{E_Z^P}, \quad \sqrt{2} \cdot \overrightarrow{E_X^P} - \overrightarrow{E_Z^P}, \quad -\sqrt{2} \cdot \overrightarrow{E_Y^P} + \overrightarrow{E_Z^P}, \quad -\sqrt{2} \cdot \overrightarrow{E_X^P} - \overrightarrow{E_Z^P}, \quad (4)$$

а векторы, входящие в н-грани порождающего набора другого из тетраэдров M и N , положительно коллинеарны векторам

$$-\sqrt{2} \cdot \overrightarrow{E_Y^P} - \overrightarrow{E_Z^P}, \quad -\sqrt{2} \cdot \overrightarrow{E_X^P} + \overrightarrow{E_Z^P}, \quad \sqrt{2} \cdot \overrightarrow{E_Y^P} - \overrightarrow{E_Z^P}, \quad \sqrt{2} \cdot \overrightarrow{E_X^P} + \overrightarrow{E_Z^P}. \quad \blacksquare \quad (5)$$

Договоримся о следующей терминологии, связанной с тесными моделями.

Определение 32. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, $\overrightarrow{E_X^P}, \overrightarrow{E_Y^P}, \overrightarrow{E_Z^P}$ – единичные направляющие векторы осей её паллиативной системы координат $OX_P Y_P Z_P$, а S – шар радиуса 1 с центром в точке O . При выполнении условий

$$\chi = 0, \pm 1, \quad \upsilon = 0, \pm 1, \quad \zeta = \pm 1, \quad \chi \cdot \upsilon = 0, \quad \chi \neq \upsilon,$$

вектор, выражаемый с помощью формулы

$$O + \chi \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \overrightarrow{E_X^P} + \upsilon \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \overrightarrow{E_Y^P} + \zeta \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overrightarrow{E_Z^P},$$

назовём *внешним вектором* модели $\langle D; A \rangle$ и обозначим, как $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \upsilon, \zeta}}$. Выделим в шаре S сечения b_1 и b_{-1} , центры C_1 и C_{-1} которых задаются по правилу $C_\zeta = O + \zeta \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overrightarrow{E_Z^P}$, $\zeta = \pm 1$.

Назовём сечения b_1 и b_{-1} *верхним* и *нижним упорами* модели $\langle D; A \rangle$. ■

Замечание. Выбор терминологии оправдывается двумя идущими ниже леммами. ■

Лемма 28. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, а $\overrightarrow{E_X^P}, \overrightarrow{E_Y^P}, \overrightarrow{E_Z^P}$ – единичные направляющие векторы осей её паллиативной системы координат $OX_P Y_P Z_P$. Тогда: (а) внешние век-

торы $\overrightarrow{\Xi_{0,1,1}}$, $\overrightarrow{\Xi_{1,0,-1}}$, $\overrightarrow{\Xi_{0,-1,1}}$, $\overrightarrow{\Xi_{-1,0,-1}}$ модели $\langle D; A \rangle$ положительно коллинеарны векторам, которые задаются формулами (4); (б) внешние векторы $\overrightarrow{\Xi_{0,-1,-1}}$, $\overrightarrow{\Xi_{-1,0,1}}$, $\overrightarrow{\Xi_{1,0,-1}}$, $\overrightarrow{\Xi_{1,0,1}}$ модели $\langle D; A \rangle$ положительно коллинеарны векторам, которые задаются формулами (5). ■

Следствие. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, в которой октаэдрическая пара A состоит из тетраэдров M и N . Тогда для любой n -грани $\{\beta; \bar{B}\}$ из объединения порождающих наборов тетраэдров M и N найдётся ровно один внешний вектор модели $\langle D; A \rangle$, которому положительно коллинеарен вектор \bar{B} . ■

Лемма 29. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, $OX_P Y_P Z_P$ – её паллиативная система координат, а b_1 и b_{-1} – верхний и нижний упоры данной модели (рис. 17). Тогда: (а) проекция точки O на плоскость упора b_ζ является центром C_ζ этого упора, $\zeta = \pm 1$; (б) конец $B_{0,\nu,\zeta}$ внешнего вектора $\overrightarrow{\Xi_{0,\nu,\zeta}}$ модели $\langle D; A \rangle$ лежит на границе упора b_ζ , причём проекция $\overrightarrow{B_{0,\nu,\zeta} C_\zeta}$ этого вектора на плоскость упора b_ζ удовлетворяет условию $\overrightarrow{B_{0,\nu,\zeta} C_\zeta} = \nu \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \overrightarrow{E_Y^P}$, $\nu = \pm 1$, $\zeta = \pm 1$; (в) конец $B_{\chi,0,\zeta}$ внешнего вектора и $\overrightarrow{\Xi_{\chi,0,\zeta}}$ модели $\langle D; A \rangle$ лежит на границе упора b_ζ , причём проекция $\overrightarrow{B_{\chi,0,\zeta} C_\zeta}$ этого вектора на плоскость упора b_ζ удовлетворяет условию $\overrightarrow{B_{\chi,0,\zeta} C_\zeta} = \chi \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \overrightarrow{E_X^P}$, $\chi = \pm 1$, $\zeta = \pm 1$. ■

Следствие. Длина любого внешнего вектора тесной модели равна 1. ■

Для удобства дальнейших ссылок оформим в виде леммы ещё одно свойство упоров и внешних векторов тесных моделей, вытекающее непосредственно из их определения.

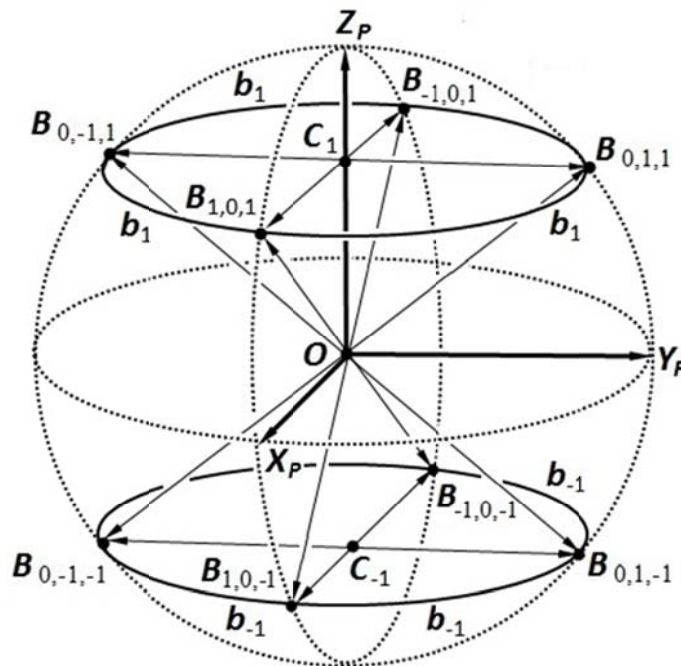


Рис. 17

Лемма 30. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, $OX_P Y_P Z_P$ – её паллиативная система координат, а b_1 и b_{-1} – верхний и нижний упоры данной модели. Тогда (а) упоры b_ζ и $b_{-\zeta}$, а также внешние векторы $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, \zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{-\chi, -\nu, -\zeta}}$ модели $\langle D; A \rangle$ симметричны относительно начала O системы координат $OX_P Y_P Z_P$, $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$; (б) упоры b_ζ и $b_{-\zeta}$, а также внешние векторы $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, \zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, -\zeta}}$ модели $\langle D; A \rangle$ симметричны относительно плоскости $OX_P Y_P$, $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$. ■

Обратим внимание также на следующее утверждение, касающееся n -граней из порождающих наборов тетраэдров, составляющих октаэдрическую пару какой-либо тесной модели.

Лемма 31. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, в которой октаэдрическая пара A состоит из тетраэдров M и N , а $\overrightarrow{E_X^P}$, $\overrightarrow{E_Y^P}$, $\overrightarrow{E_Z^P}$ – единичные направляющие векторы осей паллиативной системы координат этой модели. Если $\{\beta; \overrightarrow{B}\}$ – n -грань из объединения порождающих наборов тетраэдров M и N , а $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, \zeta}}$ – тот внешний вектор модели $\langle D; A \rangle$, которому положительно коллинеарен вектор \overrightarrow{B} , то угол δ между векторами \overrightarrow{B} и $\zeta \cdot \overrightarrow{E_Z^P}$ удовлетворяет неравенствам $54,73422^\circ \leq \delta \leq 54,73493^\circ$, $\zeta = \pm 1$.

Доказательство. Из определения внешних векторов вытекает что скалярное произведение векторов $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, \zeta}}$ и $\zeta \cdot \overrightarrow{E_Z^P}$ равно $1/\sqrt{3}$. Ввиду следствия из леммы 29 это означает: $\delta = \arccos(1/\sqrt{3})$. Данный факт даёт доказываемую лемму. ■

Сопоставляя первое утверждение леммы 30 с определением столешницы угла и следствием из леммы 28, получаем важный факт, касающийся столешниц двугранных углов тесных моделей.

Лемма 32. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, а \overrightarrow{V} – направляющий вектор оси круглобриллианта D . Предположим, что $\{\{\beta; \overrightarrow{B}\}, \{\gamma; \overrightarrow{G}\}\}$ – порождающий набор двугранного угла ϑ тесной модели $\langle D; A \rangle$, а $\{\lambda; \overrightarrow{L}\}$ – столешница этого угла. Выделим внешние векторы $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, \zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{\sigma, \tau, \xi}}$ модели $\langle D; A \rangle$, которым положительно коллинеарны векторы \overrightarrow{B} и \overrightarrow{G} . Тогда у модели $\langle D; A \rangle$ найдётся ровно один двугранный угол ϑ^* , в порождающем наборе $\{\{\beta^*; \overrightarrow{B}^*\}, \{\gamma^*; \overrightarrow{G}^*\}\}$ которого векторы \overrightarrow{B}^* и \overrightarrow{G}^* положительно коллинеарны векторам $\overrightarrow{\Xi_{-\chi, -\nu, -\zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{-\sigma, -\tau, -\xi}}$. При этом любая столешница $\{\lambda^*; \overrightarrow{L}^*\}$ двугранного угла ϑ^* удовлетворяет условиям: (а) вектор \overrightarrow{L}^* положительно коллинеарен вектору $-\overrightarrow{L}$; (б) угол между векторами \overrightarrow{L}^* и $-\overrightarrow{V}$ равен углу между векторами \overrightarrow{L} и \overrightarrow{V} . ■

Опираясь на теорему 15 и лемму 28, введём классификацию унарных двугранных углов тесных моделей.

Определение 33. Пусть $\{\{\beta; \bar{B}\}, \{\gamma; \bar{G}\}\}$ – порождающий набор унарного двугранного угла \mathfrak{D} тесной модели $\langle D; A \rangle$, а b_1 и b_{-1} – верхний и нижний упоры данной модели. Если концы внешних векторов модели $\langle D; A \rangle$, которым положительно коллинеарны \bar{B} и \bar{G} , лежат на одном и том же упоре b_ζ , назовём угол \mathfrak{D} *одноупорным*, если же конец одного из этих внешних векторов лежит на упоре b_ζ , а конец другого – на упоре $b_{-\zeta}$, назовём угол \mathfrak{D} *двухупорным*, $\zeta = \pm 1$. ■

Чтобы придать этому определению большую наглядность, рассмотрим тесную модель $\langle D; A \rangle$, в которой октаэдрическая пара A состоит из правильных тетраэдров, индуцированных одним и тем же кубом. Пусть $OXYZ$ – паллиативная система координат данной модели. Ясно, что ось OZ соединяет центр O куба с центрами двух его противоположных граней. Будем считать эти грани основаниями куба. Тогда оси OX и OY будут соединять центр O куба с серединами противоположных боковых рёбер куба. Из теоремы 15 и лемм 28, 24 вытекает, что векторы, идущие из центра O куба в его вершины, положительно коллинеарны внешним векторам модели $\langle D; A \rangle$. Пользуясь этим, обозначим вершины куба символами $U_{\chi,\nu,\zeta}$ так, чтобы вектор $\overrightarrow{OU_{\chi,\nu,\zeta}}$ был положительно коллинеарен внешнему вектору $\overline{\Xi_{\chi,\nu,\zeta}}$, $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$ (см. рис. 18, где один из тетраэдров, входящих в октаэдрическую пару A , изображён на фиг. 1, а другой – на фиг. 2). Тогда (а) рёбра одноупорных двугранных углов модели $\langle D; A \rangle$ будут содержать те рёбра тетраэдров, изображённых на рис. 18, которые лежат на основаниях куба; (б) рёбра двухупорных двугранных углов модели $\langle D; A \rangle$ будут содержать те рёбра тетраэдров, изображённых на рис. 18, которые лежат на боковых гранях куба.

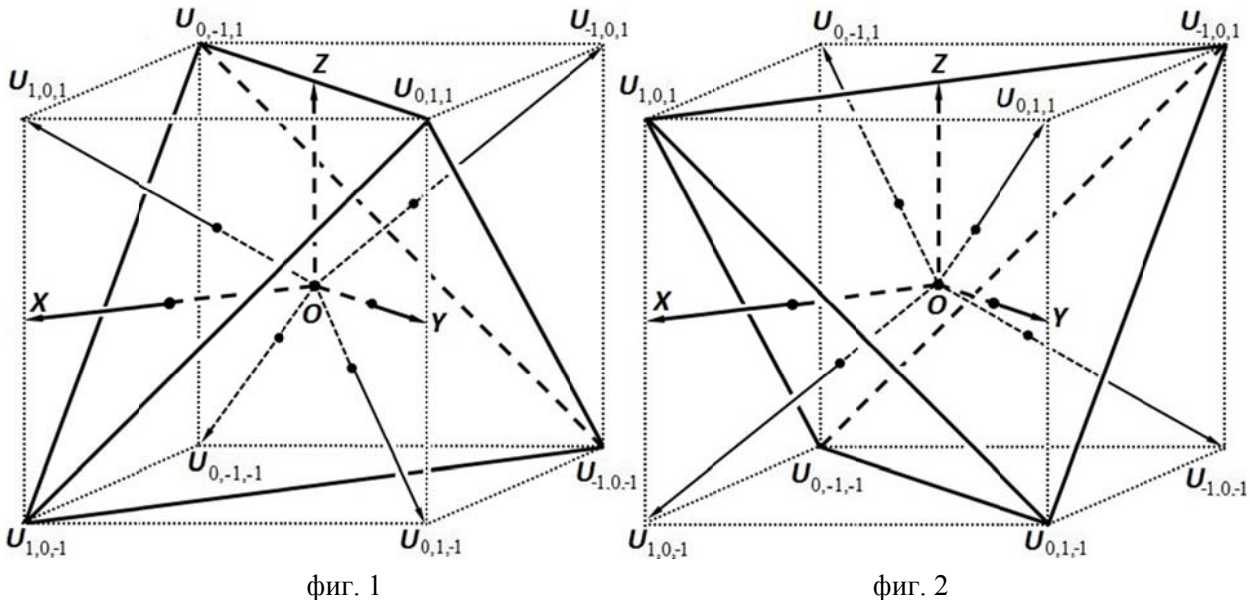


Рис. 18

Для удобства дальнейших ссылок оформим в виде лемм два свойства унарных двугранных углов тесных моделей. Первое свойство будет касаться одноупорных унарных

двугранных углов, а второе – двухопорных унарных двугранных углов. Оба свойства достаточно просто вытекают из теоремы 15 и леммы 28.

Лемма 33. Если $\{\{\beta; \vec{B}\}, \{\gamma; \vec{G}\}\}$ – порождающий набор одноопорного унарного двугранного угла \mathfrak{A} тесной модели $\langle D; A \rangle$, то выполняется одно из следующих утверждений: (а) векторы \vec{B} и \vec{G} положительно коллинеарны соответственно внешним векторам $\vec{\Xi}_{0,\zeta,\zeta}$ и $\vec{\Xi}_{0,-\zeta,\zeta}$ модели $\langle D; A \rangle$, $\zeta = \pm 1$; (б) векторы \vec{B} и \vec{G} положительно коллинеарны соответственно внешним векторам $\vec{\Xi}_{\zeta,0,\zeta}$ и $\vec{\Xi}_{-\zeta,0,\zeta}$ модели $\langle D; A \rangle$, $\zeta = \pm 1$. ■

Замечание. Заметим, что в каждом утверждении этой леммы углы, соответствующие $\zeta = +1$ и $\zeta = -1$, симметричны относительно центра круглобриллианта D . ■

Лемма 34. Если $\{\{\beta; \vec{B}\}, \{\gamma; \vec{G}\}\}$ – порождающий набор двухопорного унарного двугранного угла \mathfrak{A} тесной модели $\langle D; A \rangle$, то выполняется одно из следующих утверждений: (а) векторы \vec{B} и \vec{G} положительно коллинеарны соответственно внешним векторам $\vec{\Xi}_{\zeta,0,\zeta}$ и $\vec{\Xi}_{0,\zeta,-\zeta}$ модели $\langle D; A \rangle$, $\zeta = \pm 1$; (б) векторы \vec{B} и \vec{G} положительно коллинеарны соответственно внешним векторам $\vec{\Xi}_{\zeta,0,\zeta}$ и $\vec{\Xi}_{0,-\zeta,-\zeta}$ модели $\langle D; A \rangle$, $\zeta = \pm 1$; (в) векторы \vec{B} и \vec{G} положительно коллинеарны соответственно внешним векторам $\vec{\Xi}_{0,-\zeta,-\zeta}$ и $\vec{\Xi}_{-\zeta,0,\zeta}$ модели $\langle D; A \rangle$, $\zeta = \pm 1$; (г) векторы \vec{B} и \vec{G} положительно коллинеарны соответственно внешним векторам $\vec{\Xi}_{-\zeta,0,\zeta}$ и $\vec{\Xi}_{0,\zeta,-\zeta}$ модели $\langle D; A \rangle$, $\zeta = \pm 1$. ■

Замечание. Заметим, что в каждом утверждении этой леммы углы, соответствующие $\zeta = +1$ и $\zeta = -1$, симметричны относительно центра круглобриллианта D . ■

Пользуясь леммами 33 и 34, установим два свойства столешниц унарных двугранных углов тесных моделей. Первое свойство будет касаться столешниц одноопорных унарных двугранных углов, а второе – столешниц двухопорных унарных двугранных углов.

Лемма 35. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, b_1 и b_{-1} – её верхний и нижний упоры, а $\vec{E}_X^P, \vec{E}_Y^P, \vec{E}_Z^P$ – единичные направляющие векторы осей паллиативной системы координат $OX_P Y_P Z_P$ данной модели. Предположим, что $\{\{\beta; \vec{B}\}, \{\gamma; \vec{G}\}\}$ – порождающий набор одноопорного унарного двугранного угла \mathfrak{A} тесной модели $\langle D; A \rangle$, а $\{\lambda; \vec{L}\}$ – столешница этого двугранного угла. Если концы внешних векторов модели $\langle D; A \rangle$, которым положительно коллинеарны векторы \vec{B} и \vec{G} лежат на упоре b_ζ , то косинус угла между \vec{L} и $\zeta \cdot \vec{E}_Z^P$ равен ζ , $\zeta = \pm 1$.

Доказательство. В соответствии с определением столешницы \vec{L} положительно коллинеарен вектору $\vec{B}/|\vec{B}| + \vec{G}/|\vec{G}|$. Сопоставляя это с леммой 33 и определением внешних векторов, видим, что \vec{L} положительно коллинеарен вектору $\zeta \cdot (2/\sqrt{3}) \cdot \vec{E}_Z^P$, что даёт доказываемую лемму. ■

Лемма 36. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, $\overline{E}_X^P, \overline{E}_Y^P, \overline{E}_Z^P$ – единичные направляющие векторы осей её паллиативной системы координат $OX_P Y_P Z_P$. Если $\{\{\beta; \overline{B}\}, \{\gamma; \overline{G}\}\}$ – порождающий набор двухупорного унарного двугранного угла Θ тесной модели $\langle D; A \rangle$, а $\{\lambda; \overline{L}\}$ – столешница этого двугранного угла, то косинус угла между \overline{L} и \overline{E}_Z^P равен 0.

Доказательство. Согласно определению столешницы \overline{L} положительно коллинеарен вектору $\overline{B}/|\overline{B}| + \overline{G}/|\overline{G}|$. Сопоставляя это с леммой 34 и определением внешних векторов, видим, что \overline{L} коллинеарен вектору, представляющему собой линейную комбинацию векторов \overline{E}_X^P и \overline{E}_Y^P , что даёт доказываемую лемму. ■

* * *

Приступим к изложению третьего шага блок-схемы, изображённой на рис. 14. Введём следующие понятия.

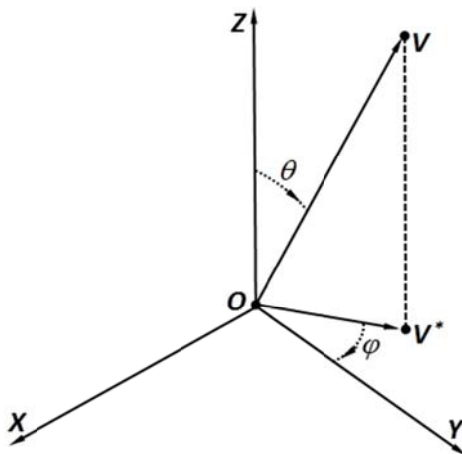


Рис. 19

Определение 34. Пусть $OXYZ$ – правая декартова система координат, \overline{OV} – вектор, выходящий из её начала O , а \overline{OV}^* – проекция данного вектора на плоскость OXY (рис. 19). Назовём углом **нутаии** вектора \overline{OV} угол θ между вектором \overline{OV} и направляющим вектором оси OZ . Назовём углом **отворота** вектора \overline{OV} угол φ , между проекцией \overline{OV}^* вектора \overline{OV} и направляющим вектором оси OY (угол φ отсчитывается от вектора \overline{OV}^* против хода часовой стрелки, если смотреть по направлению оси OZ). ■

Замечание. Обратим внимание, что для угла отворота имеет место ситуация аналогичная той, которая имеет место для угла прецессии Эйлера: если угол нутаии равен 0 или π , то угол отворота не определён. Будем считать, что в этих случаях в качестве угла отворота можно взять любое число. ■

Очевиден такой факт.

Лемма 37. Если $OXYZ$ – правая декартова система координат, \overline{OV} – вектор, выходящий из её начала O , то угол φ отворота вектора \overline{OV} связан с углом ξ отворота вектора $(-\overline{OV})$ соотношением $\xi = 180^\circ + \varphi$. ■

В дальнейшем будет использоваться следующее свойство углов отворота.

Лемма 38. Пусть $OXYZ$ – правая декартова система координат, \overline{OV} – вектор, выходящий из её начала O , а K – конус с вершиной в точке O , осью которого является ось OZ . Предположим, что θ_v – угол нутации вектора \overline{OV} , а θ_k – угол между осью конуса K и его образующими (т.е. угол нутации образующих конуса). Если OB – образующая конуса K , то угол δ между векторами \overline{OB} и \overline{OV} связан с разностью между углами ψ и φ отворота данных векторов соотношением $\cos\delta = \sin\theta_v \cdot \sin\theta_k \cdot \cos|\psi - \varphi| + \cos\theta_v \cdot \cos\theta_k$, т.е. $|\delta|$ монотонно растёт при росте $|\psi - \varphi|$ от 0 до π (рис. 20).

Доказательство. Так как оценивается только угол между векторами \overline{OV} и \overline{OB} , то без нарушения общности можно считать, что $|\overline{OV}| = |\overline{OB}| = 1$, т. е. считать, что $\cos\delta$ равен скалярному произведению векторов \overline{OV} и \overline{OB} , а сами эти вектора имеют вид

$$\overline{OV} = (-\sin\theta_v \cdot \sin\varphi; \sin\theta_v \cdot \cos\varphi; \cos\theta_v), \quad \overline{OB} = (-\sin\theta_k \cdot \sin\psi; \sin\theta_k \cdot \cos\psi; \cos\theta_k).$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \cos\delta &= \sin\theta_v \cdot \sin\theta_k \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi + \sin\theta_v \cdot \sin\theta_k \cdot \cos\varphi \cdot \cos\psi + \cos\theta_v \cdot \cos\theta_k = \\ &= \sin\theta_v \cdot \sin\theta_k \cdot \cos|\varphi - \psi| + \cos\theta_v \cdot \cos\theta_k, \end{aligned}$$

что даёт доказываемую лемму. ■

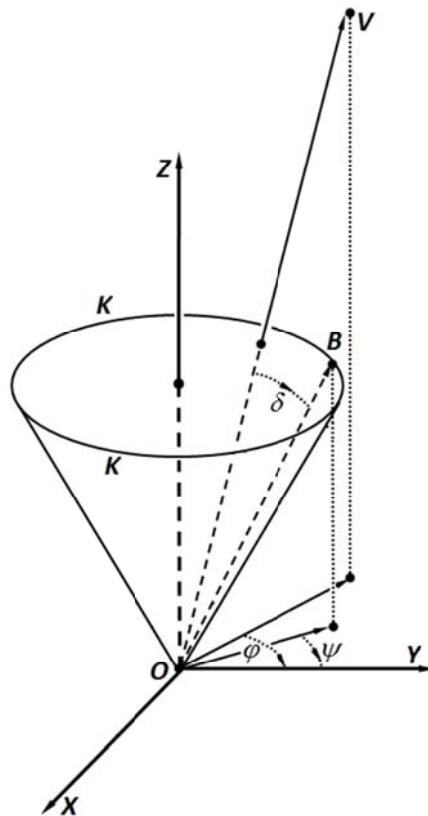


Рис. 20

Следствие. Если в условиях леммы 38 выполняются ограничения $0^\circ \leq \theta_v \leq 90^\circ$, $0^\circ \leq \theta_k \leq 90^\circ$, то угол δ между векторами \overline{OB} и \overline{OV} удовлетворяет неравенствам $|\theta_k - \theta_v| \leq \delta \leq |\theta_k + \theta_v|$. ■

Из этого следствия очевидным образом вытекает такой факт.

Лемма 39. Если в условиях леммы 38 выполняются соотношения $0^\circ \leq \theta_v \leq 12^\circ$, $54,732^\circ \leq \theta_k \leq 54,7392^\circ$, то угол δ между векторами \overline{OB} и \overline{OV} удовлетворяет неравенствам $\pi/2 > \delta > 42^\circ$.

Доказательство. Из условия данного следствия вытекает, что $\sin\theta_v \cdot \sin\theta_k \geq 0$, $\cos\theta_v \cdot \cos\theta_k \geq 0$. Согласно лемме 38 это означает, что $\cos(\theta_v + \theta_k) \leq \cos\delta \leq \cos(\theta_v - \theta_k)$. Отсюда следуют требуемые неравенства. ■

Рассмотрим тесную модель $\langle D; A \rangle$ и её паллиативную систему координат $OX_P Y_P Z_P$. Из леммы 27 и определения кристаллографической системы координат тесной модели вытекает, что угол между осью круглобриллианта D и осью OZ_P системы координат $OX_P Y_P Z_P$ не превосходит 12° . Сопоставляя это обстоятельство со следствием из теоремы 15 и следствием 5 из леммы 38, получаем такой факт.

Теорема 16. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, в которой октаэдрическая пара A состоит из тетраэдров M и N . Предположим, что \overline{U} – направляющий вектор оси круглобриллианта D , а \overline{V} – вектор, входящий в n -грань из объединения порождающих наборов тетраэдров M и N . Если проекция \overline{V} на ось аппликат (ось OZ) паллиативной системы координат модели $\langle D; A \rangle$ положительно (соответственно отрицательно) коллинеарна направляющему вектору этой оси, то угол σ , который \overline{V} составляет с \overline{U} , удовлетворяет неравенствам $42,732^\circ \leq \sigma < 90^\circ$ (соответственно неравенствам $137,2608^\circ \leq \theta_k < 180^\circ$). ■

Так как проектирование на плоскость является линейным преобразованием, оно обладает следующим свойством.

Свойство 2. Если вектор \overline{A} связан с векторами $\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_n$ линейным соотношением, т.е. $\overline{A} = b_1 \cdot \overline{B}_1 + \dots + b_n \cdot \overline{B}_n$, то проекция \overline{A}^* вектора \overline{A} на какую-либо плоскость связана с проекциями $\overline{B}_1^*, \dots, \overline{B}_n^*$ векторов $\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_n$ на эту плоскость таким же линейным соотношением, т.е. $\overline{A}^* = b_1 \cdot \overline{B}_1^* + \dots + b_n \cdot \overline{B}_n^*$. ■

Совместно со следствием из леммы 28, леммой 29, первым утверждением леммы 30, леммой 37 и определением столешницы двугранного угла данное свойство обосновывает такие четыре утверждения

Лемма 40. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, $\{\{\beta; \overline{B}\}, \{\gamma; \overline{G}\}\}$ – порождающий набор двугранного угла ϑ этой модели $\langle D; A \rangle$, а $\{\{\lambda; \overline{L}\}\}$ – столешница данного двугранного угла. Если векторы \overline{B} и \overline{G} положительно коллинеарны внешним векторам $\overline{\Xi}_{0,1,1}$ и $\overline{\Xi}_{-1,0,1}$ (со-

ответственно внешним векторам $\overrightarrow{\Xi_{0,1,-1}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{-1,0,-1}}$ модели $\langle D; A \rangle$ то угол отворота вектора \vec{L} равен 45° (соответственно -135°). ■

Лемма 41. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, $\{\{\beta; \vec{B}\}, \{\gamma; \vec{G}\}\}$ – порождающий набор двугранного угла \mathfrak{G} этой модели $\langle D; A \rangle$, а $\{\lambda; \vec{L}\}$ – столешница данного двугранного угла. Если векторы \vec{B} и \vec{G} положительно коллинеарны внешним векторам $\overrightarrow{\Xi_{-1,0,1}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{0,-1,1}}$ (соответственно внешним векторам $\overrightarrow{\Xi_{-1,0,-1}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{0,-1,-1}}$) модели $\langle D; A \rangle$ то угол отворота вектора \vec{L} равен 135° (соответственно -45°). ■

Лемма 42. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, $\{\{\beta; \vec{B}\}, \{\gamma; \vec{G}\}\}$ – порождающий набор двугранного угла \mathfrak{G} этой модели $\langle D; A \rangle$, а $\{\lambda; \vec{L}\}$ – столешница данного двугранного угла. Если векторы \vec{B} и \vec{G} положительно коллинеарны внешним векторам $\overrightarrow{\Xi_{0,-1,1}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{1,0,1}}$ (соответственно внешним векторам $\overrightarrow{\Xi_{0,-1,-1}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{1,0,-1}}$) модели $\langle D; A \rangle$ то угол отворота вектора \vec{L} равен -135° (соответственно 45°). ■

Лемма 43. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, $\{\{\beta; \vec{B}\}, \{\gamma; \vec{G}\}\}$ – порождающий набор двугранного угла \mathfrak{G} этой модели $\langle D; A \rangle$, а $\{\lambda; \vec{L}\}$ – столешница данного двугранного угла. Если векторы \vec{B} и \vec{G} положительно коллинеарны внешним векторам $\overrightarrow{\Xi_{1,0,1}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{0,1,1}}$ (соответственно внешним векторам $\overrightarrow{\Xi_{1,0,-1}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{0,1,-1}}$) модели $\langle D; A \rangle$ то угол отворота вектора \vec{L} равен -45° (соответственно 135°). ■

Используя углы нутации и отворота векторов, введём одноимённые углы для тесных моделей.

Определение 35. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, $Ox_P y_P z_P$ – её паллиативная система координат, а \vec{E} – выходящий из начала O этой системы координат направляющий вектор оси круглобриллианта D . Углы нутации и отворота вектора \vec{E} договоримся называть также углами *нутации и отворота* модели $\langle D; A \rangle$. ■

Замечание. Из определения допустимого вложения круглобриллианта в октаэдрическую пару (определение 13) и определения тесной модели (определение 17) вытекает, что угол нутации тесной модели не превосходит 12° . ■

* * *

Опираясь на понятие угла отворота тесной модели, свяжем с каждой тесной моделью декартову систему координат, которую назовём *бриллиантовой*.

Определение 36. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, а $Ox_P y_P z_P$ – её паллиативная система координат. Выделим на плоскости $Ox_P y_P$ вектор $\overrightarrow{OV^*}$, который образует с положительной частью оси Oy_P угол равный углу φ отворота модели $\langle D; A \rangle$. *Бриллиантовой* системой координат модели $\langle D; A \rangle$ назовём правую декартову систему координат $Ox_D y_D z_D$,

удовлетворяющую следующим двум условиям. Во-первых, ось OZ_D совпадает с осью круглобриллианта D и направлена в ту же сторону (и потому образует с положительной частью оси OZ_P угол, равный углу нутации θ модели $\langle D; A \rangle$). Во-вторых, положительная часть оси OY_D лежит в полуплоскости, натянутой на вектор $\overrightarrow{OV^*}$ и ось OZ_P паллиативной системы координат. ■

Для наглядности приведём совместное изображение паллиативной и бриллиантовой систем координат $OX_P Y_P Z_P$ и $OX_D Y_D Z_D$ тесной модели, углы нутации и отворота которой равны θ и φ (рис 21).

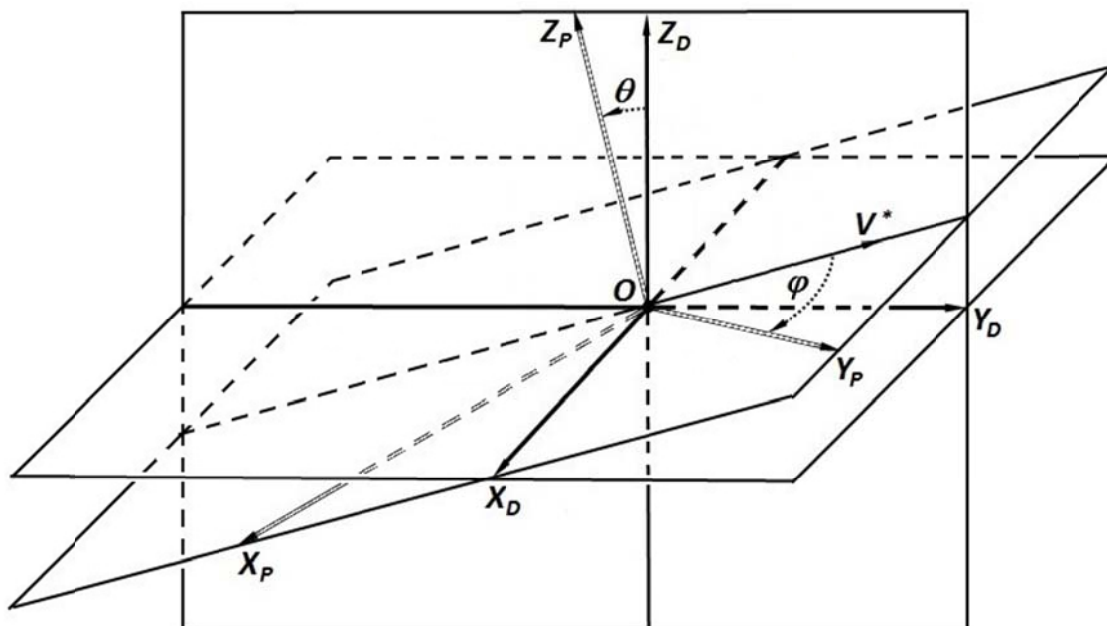


Рис. 21

Не слишком сложно увидеть, что между паллиативной и бриллиантовой системами координат тесной модели имеется такая связь.

Лемма 44. Пусть θ и φ – углы нутации и отворота тесной модели $\langle D; A \rangle$, а $\overrightarrow{E_Z}$, $\overrightarrow{E_Y}$ и $\overrightarrow{E_X}$ – единичные направляющие векторы осей паллиативной системы координат данной модели. Тогда в бриллиантовой системе координат модели $\langle D; A \rangle$ покоординатная запись векторов $\overrightarrow{E_Z}$, $\overrightarrow{E_Y}$ и $\overrightarrow{E_X}$ имеет вид

$$\overrightarrow{E_Z} = (0; -\sin\theta; \cos\theta);$$

$$\overrightarrow{E_Y} = (\sin\varphi; \cos\varphi \cdot \cos\theta; \cos\varphi \cdot \sin\theta);$$

$$\overrightarrow{E_X} = (\cos\varphi; -\sin\varphi \cdot \cos\theta; -\sin\varphi \cdot \sin\theta). \blacksquare$$

Следствие. Пусть $OX_P Y_P Z_P$ и $OX_D Y_D Z_D$ – паллиативная и бриллиантовая системы координат тесной модели $\langle D; A \rangle$, а θ – угол нутации этой модели. Если $\overrightarrow{OE_{P,Z}}$ и $\overrightarrow{OE_{D,Y}}$ – единичные направляющие векторы осей OZ_P и OY_D , а \overrightarrow{OV} – проекция вектора $\overrightarrow{OE_{P,Z}}$ на плоскость $OX_D Y_D$, то $\overrightarrow{OV} = -\sin\theta \cdot \overrightarrow{OE_{D,Y}}$. ■

Обратим внимание ещё на три факта, вытекающих из леммы 44.

Лемма 45. Пусть $OX_P Y_P Z_P$ и $OX_D Y_D Z_D$ – паллиативная и бриллиантовая системы координат тесной модели $\langle D; A \rangle$, а θ – угол нутации этой модели. Если p_x и p_y длины проекций единичных направляющих векторов осей OX_P и OY_P на плоскость $OX_D Y_D$, то

$$1 \geq |p_x| \geq \cos\theta \quad \text{и} \quad 1 \geq |p_y| \geq \cos\theta.$$

Доказательство. Неравенства $1 \geq |p_x|$ и $1 \geq |p_y|$ следуют из того, что длина проекции вектора не может быть больше длины вектора. Очевидно, что

$$(1 - \cos^2\varphi \cdot \sin^2\theta) \geq \cos^2\theta, \quad (1 - \sin^2\varphi \cdot \sin^2\theta) \geq \cos^2\theta.$$

Из этих неравенств и леммы 44 вытекает, что для обоснования доказываемой леммы достаточно показать, что

$$(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cdot \cos^2\theta) = (1 - \cos^2\varphi \cdot \sin^2\theta), \quad (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \cdot \cos^2\theta) = (1 - \sin^2\varphi \cdot \sin^2\theta).$$

Первое равенство следует из цепочки соотношений

$$(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cdot \cos^2\theta) = (1 - \cos^2\varphi + \cos^2\varphi \cdot \cos^2\theta) = [1 - \cos^2\varphi \cdot (1 - \cos^2\theta)] = (1 - \cos^2\varphi \cdot \sin^2\theta),$$

а второе – из цепочки соотношений

$$(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \cdot \cos^2\theta) = (1 - \sin^2\varphi + \sin^2\varphi \cdot \cos^2\theta) = [1 - \sin^2\varphi \cdot (1 - \cos^2\theta)] = (1 - \sin^2\varphi \cdot \sin^2\theta). \quad \blacksquare$$

Лемма 46. Пусть $OX_P Y_P Z_P$ и $OX_D Y_D Z_D$ – паллиативная и бриллиантовая системы координат тесной модели $\langle D; A \rangle$, а θ – угол нутации этой модели. Если p_x , p_y и p_z длины проекций единичных направляющих векторов осей OX_P , OY_P и OZ_P на плоскость $OX_D Y_D$, то $\min(p_x; p_y) \geq 4 \cdot p_z$.

Доказательство. Сопоставляя следствие из леммы 44 и лемму 45 с тем, что угол нутации тесной модели не превосходит 12° (см. замечание к определению 35), получаем: $\min(p_x; p_y) \geq \cos 12^\circ \geq 0,978$, $p_z \leq \sin 12^\circ \leq 0,208$, что даёт требуемое утверждение. \blacksquare

Лемма 47. Пусть $OX_P Y_P Z_P$ и $OX_D Y_D Z_D$ – паллиативная и бриллиантовая системы координат тесной модели $\langle D; A \rangle$. Предположим, что $\overrightarrow{E_X}$ и $\overrightarrow{E_Y}$ – единичные направляющие векторы осей OX_P и OY_P системы координат $OX_P Y_P Z_P$, а $\overrightarrow{V_X}$ и $\overrightarrow{V_Y}$ – проекции векторов $\overrightarrow{E_X}$ и $\overrightarrow{E_Y}$ на плоскость $OX_D Y_D$ системы координат $OX_D Y_D Z_D$. Тогда при любых $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$ угол $\zeta_{\alpha,\beta}$ между векторами $\alpha \cdot \overrightarrow{V_X}$ и $\beta \cdot \overrightarrow{V_Y}$ удовлетворяет неравенствам $91,2945^\circ \geq \zeta_{\alpha,\beta} \geq 88,7055^\circ$.

Доказательство. Пусть углы нутации и отворота модели $\langle D; A \rangle$ равны θ и φ . Из леммы 44 вытекает, что при любых $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$ модуль скалярного произведения векторов $\alpha \cdot \overrightarrow{V_X}$ и $\beta \cdot \overrightarrow{V_Y}$ можно представить в виде

$$|(\alpha \cdot \overrightarrow{V_X}; \beta \cdot \overrightarrow{V_Y})| = |(\overrightarrow{V_X}; \overrightarrow{V_Y})| = |\sin\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \cos^2\theta| = |0,5 \cdot \sin 2\varphi \cdot \sin^2\theta|. \quad (6)$$

При этом согласно лемме 45:

$$|(\alpha \cdot \overrightarrow{V_X}; \alpha \cdot \overrightarrow{V_X})| = |(\overrightarrow{V_X}; \overrightarrow{V_X})| \geq \cos^2\theta, \quad |(\beta \cdot \overrightarrow{V_Y}; \beta \cdot \overrightarrow{V_Y})| = |(\overrightarrow{V_Y}; \overrightarrow{V_Y})| \geq \cos^2\theta. \quad (7)$$

Сопоставляя формулы (6) и (7) с тем, что согласно определению тесной модели (определение 17) и определению допустимого вложения круглобриллианта в октаэдрескую пару $\theta \leq 12^\circ$, получаем:

$$|(\alpha \cdot \vec{V}_X; \beta \cdot \vec{V}_Y)| \leq 0,5 \cdot (0,2079117)^2 \leq 0,021614,$$

$$|\alpha \cdot \vec{V}_X| \cdot |\beta \cdot \vec{V}_Y| = \sqrt{(\alpha \cdot \vec{V}_X; \alpha \cdot \vec{V}_X) \cdot (\beta \cdot \vec{V}_Y; \beta \cdot \vec{V}_Y)} \geq \cos^2 \theta \geq 0,95677.$$

Ввиду этих неравенств

$$|\cos \zeta_{\alpha, \beta}| = \frac{|(\alpha \cdot \vec{V}_X; \beta \cdot \vec{V}_Y)|}{|\alpha \cdot \vec{V}_X| \cdot |\beta \cdot \vec{V}_Y|} \leq \frac{0,021614}{0,95677} \leq 0,022591,$$

откуда следует доказываемая лемма. ■

4. ВНЕШНИЕ ВЕКТОРЫ И БРИЛЛИАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В этом пункте рассматриваются вопросы, связанные с взаимным расположением проекций некоторых пар внешних векторов тесной модели $\langle D; A \rangle$ на плоскость OXY бриллиантовой системы координат $OXYZ$ данной модели. При этом рассмотрении будет активно использоваться следующий факт, который вытекает из определения упоров и леммы 29.

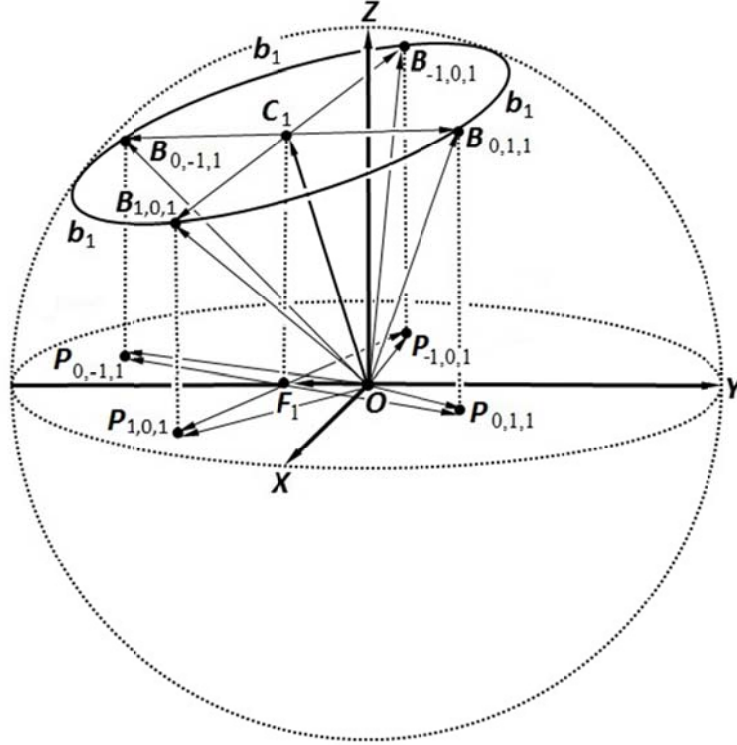


Рис. 22

Лемма 48. Рассмотрим тесную модель $\langle D; A \rangle$. Предположим, что $\overline{E}_X, \overline{E}_Y, \overline{E}_Z$ единичные направляющие векторы её бриллиантовой системы координат $OXYZ$, а $\overline{U}_X, \overline{U}_Y, \overline{U}_Z$ – проекции на плоскость OXY единичных направляющих векторов её паллиативной системы координат. Пусть b_1 и b_{-1} – верхний и нижний упоры модели $\langle D; A \rangle$, а F_1 и F_{-1} – проекции центров C_1 и C_{-1} этих упоров на плоскость OXY . Предположим, что $B_{\chi,\nu,\zeta}$ – конец внешнего вектора $\overline{\Xi}_{\chi,\nu,\zeta}$ модели $\langle D; A \rangle$, а $P_{\chi,\nu,\zeta}$ – проекция точки $B_{\chi,\nu,\zeta}$ на плоскость OXY , $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$. Тогда

$$\overline{OF}_\zeta = \zeta \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{U}_Z, \quad \overline{F}_\zeta P_{\chi,0,\zeta} = \chi \cdot \zeta \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \overline{U}_X, \quad \overline{OP}_{\chi,\nu,\zeta} = \overline{OF}_\zeta + \overline{F}_\zeta P_{\chi,\nu,\zeta},$$

$$\chi = 0, \pm 1; \quad \nu = 0, \pm 1; \quad \chi \cdot \nu = 0; \quad \chi \neq \nu; \quad \zeta = \pm 1. \quad \blacksquare$$

Замечание. Для наглядности покажем на рис. 22 некоторые объекты из условия данной леммы. Во-первых, изобразим на этом рисунке упор b_1 . Во-вторых, изобразим на

нём точки C_1 и F_1 . И, наконец, в-третьих, изобразим на данном рисунке точки $B_{\chi,\nu,1}$ и $P_{\chi,\nu,1}$, $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$. То, что можно не загромождать рисунок и ограничиться изображением только этих объектов вытекает из леммы 30. ■

Для облегчения дальнейшего чтения разобьём рассмотрение вопросов, связанных с взаимным расположением проекций внешних векторов модели $\langle D; A \rangle$ на плоскость OXY на два шага. На первом шаге установим ряд вспомогательных геометрических фактов, не связанных напрямую ни с внешними векторами, ни с их проекциями. На втором шаге проанализируем взаимное расположение проекций пар внешних векторов в ситуации, когда конец одного из векторов лежит на одном упоре, а конец второго – на другом упоре. Для наглядности изобразим последовательность перечисленных шагов в виде блок-схемы (Рис. 23).



Рис. 23

Приступим к изложению первого шага этой блок-схемы. Прежде всего, отметим следующее известное свойство треугольников.

Свойство 3. Если O – точка треугольника ABC , то угол между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} не превосходит угла между векторами \overrightarrow{OB} и \overrightarrow{OC} (рис. 24). ■

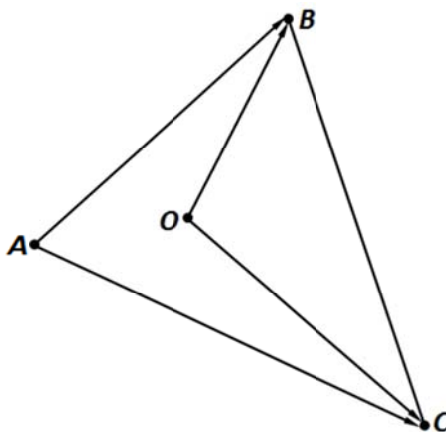


Рис. 24

Обратим также внимание на такое свойство кругов.

Лемма 49. Пусть s – круг радиуса r с центром в точке O , а A – точка, лежащая вне этого круга. Тогда при любой точке $B \in s$ угол BAO не превосходит $\arcsin(r/|AO|)$.

Доказательство. Если AC и AD – выходящие из A касательные к кругу s , то $\angle CAO = \angle DAO = \arcsin(r/|AO|)$ (рис. 25). Сопоставляя это с тем, что AB принадлежит $\angle CAO$ или $\angle DAO$ (если B лежит на луче AO , то AB принадлежит сразу обоим углам), получаем доказываемое утверждение. ■

Следствие. Если LN – наименьшая сторона треугольника LMN , то угол при вершине M не превосходит $\arcsin\left(\frac{|LN|}{\max(|ML|, |MN|)}\right)$.

Доказательство. Если $|MN| \geq |ML|$ описываем вокруг N круг радиуса $|NL|$ и применяем лемму 49. В противном случае описываем такой же круг вокруг L . ■

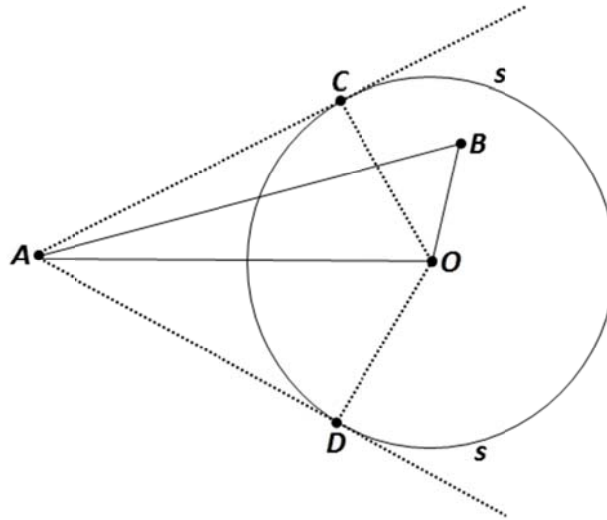


Рис. 25

Ещё ряд нужных в дальнейшем фактов касаются угла, который образуют выходящие из одной и той же вершины треугольника его медиана и биссектриса.

Лемма 50. Рассмотрим треугольники AOD и AOD^* , где

$$\angle AOD = \angle AOD^*, \quad |OD^*|/|OA| > |OD|/|OA| \geq 1. \quad (8)$$

Если OB и OM – биссектриса и медиана треугольника AOD , а OB^* и OM^* – биссектриса и медиана треугольника AOD^* , то $\angle B^*OM^* > \angle BOM$ (рис. 26).

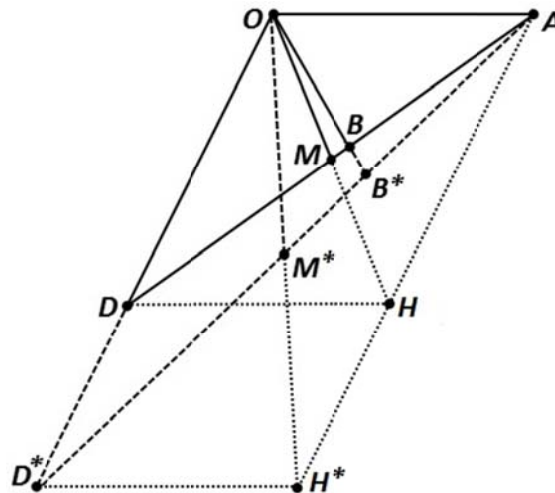


Рис. 26

Доказательство. Достроим треугольник AOD до параллелограмма $AODH$, а треугольник AOD^* до параллелограмма $AODH^*$. Тогда

$$M \in OH, \quad M^* \in OH^*. \quad (9)$$

При этом в силу второго из условий (8)

$$H \in AH^*. \quad (10)$$

По свойству биссектрисы треугольника $|BD|/|BA| = |OD|/|OA|$. Совместно со вторым из условий (8) это означает, что

$$B \in MA. \quad (11)$$

Ввиду первого из условий (8) $B \in BB^*$. Совместно с (9), (10) и (11) данное обстоятельство даёт доказываемую лемму. ■

Лемма 51. Рассмотрим треугольники AOD и AOD^* , где

$$|OD| = |OD^*|, \quad \angle AOD^* > \angle AOD. \quad (12)$$

Если OB и OM – биссектриса и медиана треугольника AOD , а OB^* и OM^* – биссектриса и медиана треугольника AOD^* , то $\angle B^*OM^* > \angle BOM$ (рис. 27).

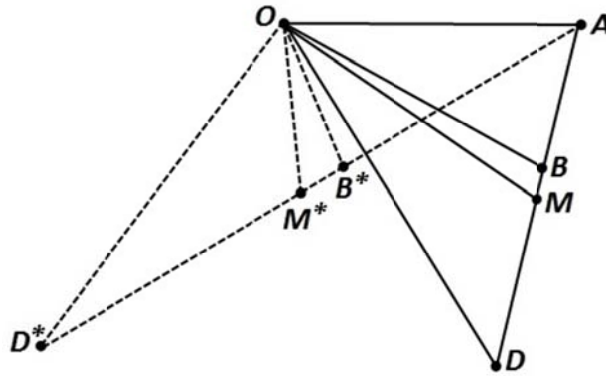


Рис. 27

Доказательство. По теореме косинусов

$$|AD|^2 = |OA|^2 + |OD|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |OD| \cdot \cos(\angle AOD),$$

$$|AD^*|^2 = |OA|^2 + |OD^*|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |OD^*| \cdot \cos(\angle AOD^*)$$

Совместно с (12) эти равенства показывают, что

$$|AD^*| > |AD|. \quad (13)$$

В соответствии со свойствами биссектрисы треугольника

$$|DB|/|BA| = |OD|/|OA|, \quad |D^*B^*|/|B^*A| = |OD^*|/|OA|, \quad (14)$$

$$|OB|^2 = |OD|^2 + |OA|^2 - |DB| \cdot |BA|, \quad |OB^*|^2 = |OD^*|^2 + |OA|^2 - |D^*B^*| \cdot |B^*A|. \quad (15)$$

Объединяя (13), (14) и первое из соотношений (12) можно увидеть, что

$$|D^*B^*| > |DB|, \quad |B^*A| > |BA|, \quad |M^*B^*| > |MB|. \quad (16)$$

Сопоставляя первые два из этих неравенств с (15) и первым из соотношений (12), получаем:

$$|OB^*| < |OB|. \quad (17)$$

По свойству медианы треугольника $2 \cdot \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OD}$, $2 \cdot \overline{OM^*} = \overline{OA} + \overline{OD^*}$. Совместно с теоремой косинусов это даёт

$$4 \cdot |OM|^2 = |OA|^2 + |OD|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |OD| \cdot \cos(180^\circ - \angle AOD)$$

$$4 \cdot |OM^*|^2 = |OA|^2 + |OD^*|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |OD^*| \cdot \cos(180^\circ - \angle AOD^*)$$

Сопоставляя данные равенства со вторым из соотношений (12) получаем, что $|OM^*| < |OM|$. (18)

Применяя теорему косинусов к треугольникам MOB и M^*OB^* , имеем

$$|MB|^2 = |OM|^2 + |OB|^2 - 2 \cdot |OM| \cdot |OB| \cdot \cos(\angle MOB),$$

$$|M^*B^*|^2 = |OM^*|^2 + |OB^*|^2 - 2 \cdot |OM^*| \cdot |OB^*| \cdot \cos(\angle M^*OB^*).$$

Совместно с (18), (17) и третьим из соотношений (16) эти равенства показывают, что $\cos(\angle MOB) > \cos(\angle M^*OB^*)$, откуда следует, что $\angle MOB < \angle M^*OB^*$, ч.т.д. ■

Заметим, что две последние леммы позволяют оценить только знак изменения угла между медианой и биссектрисой треугольника при изменении этого треугольника. Предпоследняя лемма оценивает указанный знак при изменении отношения длин сторон треугольника, а последняя лемма оценивает данный знак при изменении угла треугольника. Способ, позволяющий вычислять значения угла между медианой и биссектрисой треугольника, даёт следующая лемма.

Лемма 52. Пусть угол между выходящими из точки O векторами \overline{OA} и \overline{OD} равен σ . Предположим, что \overline{OM} = медиана треугольника AOD , а \overline{OB} – биссектриса этого треугольника. Если $|\overline{OD}|/|\overline{OA}| = \delta$, то косинус угла между векторами \overline{OM} и \overline{OB} равен

$$\frac{\sqrt{1 + \cos \sigma}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\delta + 1}{\sqrt{\delta^2 + 1 + 2\delta \cos \sigma}}.$$

Доказательство. Т.к. в условии доказываемой леммы фигурируют только углы и отношения длин, без нарушения общности можно считать, что

$$|\overline{OA}| = 1, \quad |\overline{OD}| \geq |\overline{OA}|. \quad (19)$$

Условие $|\overline{OD}| \geq |\overline{OA}|$ позволяет выделить на векторе \overline{OD} такую точку C , что

$$|\overline{OC}| = |\overline{OA}|. \quad (20)$$

Введём на плоскости, натянутой на векторы \overline{OA} и \overline{OD} , систему координат OXY , в которой \overline{OA} является направляющим вектором оси OY (рис. 28). Ввиду первого из соотношений (19) в этой системе координат

$$\overline{OA} = (0; 1); \quad \overline{OC} = (\sin \sigma; \cos \sigma); \quad \overline{OD} = (\delta \sin \sigma; \delta \cos \sigma). \quad (11)$$

Как известно, точка M лежит на векторе $\overline{OD} + \overline{OA}$, а из (20) вытекает, что точка B лежит на векторе $\overline{OC} + \overline{OA}$. Это означает, что косинус угла γ между векторами \overline{OM} и \overline{OB} может быть найден по формуле

$$\cos \gamma = \frac{(\overline{OD} + \overline{OA}; \overline{OC} + \overline{OA})}{|\overline{OD} + \overline{OA}| \cdot |\overline{OC} + \overline{OA}|}, \quad (22)$$

где скобки означают скалярное произведение. Ввиду (21) имеем

$$(\overline{OD} + \overline{OA}; \overline{OC} + \overline{OA}) = \delta \sin^2 \sigma + (\delta \cos \sigma + 1) \cdot (\delta \cos \sigma + 1) = (\delta + 1)(1 + \cos \sigma),$$

при этом из теоремы косинусов, первого из соотношений (19) и равенства (20) следует, что $|\overline{OD} + \overline{OA}| = \sqrt{\delta^2 + 1 + 2\delta \cos \sigma}$, $|\overline{OC} + \overline{OA}| = \sqrt{2(1 + \cos \sigma)}$. Подставляя эти выражения в (22), получаем требуемую формулу для $\cos \gamma$. ■

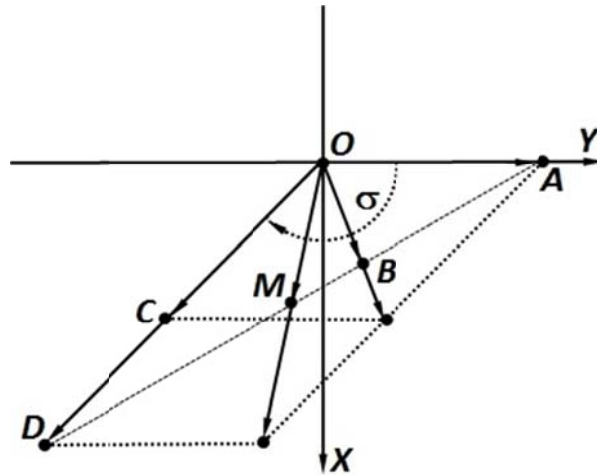


Рис. 28

* * *

Перейдём к изложению второго шага блок-схемы, изображённой на рис. 23. На этом шаге устанавливается ряд утверждений, характеризующих взаимное расположение проекций пар внешних векторов тесной модели на плоскость абсцисс и ординат её бриллиантовой системы координат. Устанавливаемые на этом шаге утверждения касаются ситуации, когда концы обоих векторов лежат на одном и том же упоре. Перед тем, как формулировать данные утверждения, отметим такой факт.

Лемма 53. Рассмотрим тесную модель $\langle D; A \rangle$, угол нутации которой равен θ . Пусть b_1 и b_{-1} – верхний и нижний упоры модели $\langle D; A \rangle$, а F_1 и F_{-1} – проекции центров этих упоров на плоскость OXY бриллиантовой системы координат $OXYZ$ данной модели. Предположим, что $P_{\chi, \nu, \zeta}$, проекция конца внешнего вектора $\overline{\Xi}_{\chi, \nu, \zeta}$ модели $\langle D; A \rangle$ на плоскость OXY , $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$. Если угол θ удовлетворяет ограничениям $0^\circ \leq \theta \leq 12^\circ$, то в треугольнике $F_\zeta P_{\chi, \nu, \zeta} O$ имеет неравенство

$$\angle F_\zeta P_{\chi, \nu, \zeta} O \leq 8,64443^\circ, \quad \chi = 0, \pm 1; \nu = 0, \pm 1; \chi \cdot \nu = 0; \chi \neq \nu; \zeta = \pm 1.$$

Доказательство. Объединяя лемму 48 с леммой 45 и следствием из леммы 44, получаем:

$$|F_\zeta P_{\chi, \nu, \zeta}| \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos \theta, \quad |F_\zeta O| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin \theta, \quad \chi = 0, \pm 1; \nu = 0, \pm 1; \chi \cdot \nu = 0; \chi \neq \nu; \zeta = \pm 1. \quad (23)$$

Из леммы 46 и неравенства треугольника вытекает, что $\min(|P_{\chi, \nu, \zeta} F_\zeta|; |P_{\chi, \nu, \zeta} O|) > |OF_\zeta|$. Поэтому к $\angle F_\zeta P_{\chi, \nu, \zeta} O$ треугольника $F_\zeta P_{\chi, \nu, \zeta} O$ можно применить следствие из леммы 49, которое совместно с (23) и условием $\theta \leq 12^\circ$ даёт: $\angle F_\zeta P_{\chi, \nu, \zeta} O \leq \arcsin(\tan 12^\circ / \sqrt{2})$,

$\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$. Сопоставляя это с тем, что $\arcsin(\tan 12^\circ / \sqrt{2}) \leq 8,64443^\circ$, получаем требуемое утверждение. ■

Перейдём к утверждениям, касающимся взаимного расположения проекций пар внешних векторов тесной модели на плоскость абсцисс и ординат её бриллиантовой системы координат.

Лемма 54. Рассмотрим тесную модель $\langle D; A \rangle$, углы нутации и отворота которой равны θ и φ . Пусть b_1 и b_{-1} – верхний и нижний упоры модели $\langle D; A \rangle$, а F_1 и F_{-1} – проекции центров этих упоров на плоскость OXY бриллиантовой системы координат $OXYZ$ данной модели. Обозначим проекцию конца внешнего вектора $\overline{\Xi_{\chi,\nu,\zeta}}$ модели $\langle D; A \rangle$ на плоскость OXY , как $P_{\chi,\nu,\zeta}$, $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$. Если

$$0^\circ \leq \theta \leq 12^\circ, \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ, \quad (24)$$

то (а) $88,7055^\circ \leq \angle P_{\zeta,0,\zeta}OP_{0,\zeta,-\zeta} \leq 108,58336^\circ$, $\zeta = \pm 1$; (б) косинус угла σ между выходящими из O медианой и биссектрисой треугольника $P_{\zeta,0,\zeta}OP_{0,\zeta,-\zeta}$ больше или равен $0,9761$, $\zeta = \pm 1$.

Доказательство. Ввиду леммы 30 можно ограничиться рассмотрением случая $\zeta = 1$ (рис. 29). Пусть α – угол между $\overline{F_1P_{1,0,1}}$ и отрицательным направлением оси OY , а β – угол между $\overline{F_{-1}P_{0,1,-1}}$ и положительным направлением этой оси. Ясно, что

$$\text{угол между } \overline{F_1P_{1,0,1}} \text{ и } \overline{F_{-1}P_{0,1,-1}} \text{ равен } 180^\circ - (\alpha + \beta). \quad (25)$$

Так как α и β являются внешними углами треугольников $F_1P_{1,0,1}O$ и $F_{-1}P_{0,1,-1}O$, то $\angle F_1OP_{1,0,1} = \alpha - \angle F_1P_{1,0,1}O$, $\angle F_{-1}OP_{0,1,-1} = \beta - \angle F_{-1}P_{0,1,-1}O$.

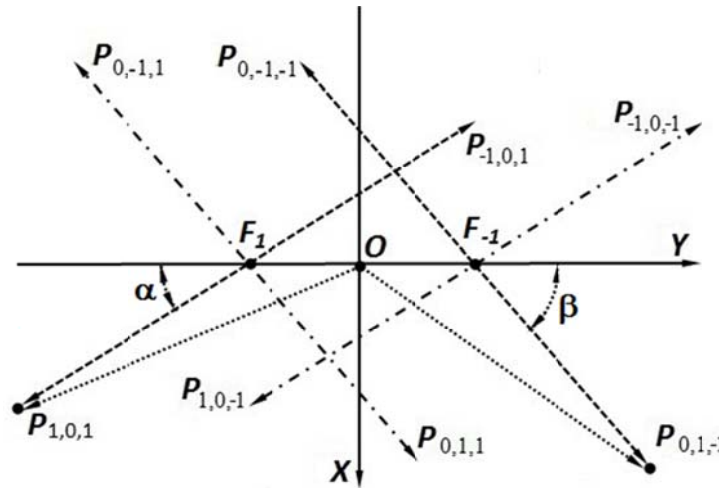


Рис. 29

Сопоставляя это с тем, что $\angle P_{1,0,1}OP_{0,1,-1} = 180^\circ - \angle F_1OP_{1,0,1} - \angle F_{-1}OP_{0,1,-1}$, получаем

$$\angle P_{1,0,1}OP_{0,1,-1} = 180^\circ - (\alpha + \beta) + (\angle F_1P_{1,0,1}O + \angle F_{-1}P_{0,1,-1}O). \quad (26)$$

Из лемм 29 и 47 следует, что угол между $\overline{F_1P_{1,0,1}}$ и $\overline{F_{-1}P_{0,1,-1}}$ не меньше $88,7055^\circ$ и не больше $91,2945^\circ$, а из леммы 53 вытекает, что $(\angle F_1P_{1,0,1}O + \angle F_{-1}P_{0,1,-1}O) \leq 17,28886$. Совместно с (25) и (26) это даёт первое утверждение доказываемой леммы.

Перейдём к обоснованию её второго утверждения. Из лемм 29, 45, следствия из леммы 44 и неравенства треугольника вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin \theta &\leq \min(|OP_{1,0,1}|; |OP_{0,1,-1}|) \leq \max(|OP_{1,0,1}|; |OP_{0,1,-1}|) \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin \theta, \end{aligned}$$

Эти соотношения показывают, что отношение бóльшей из величин $|OP_{1,0,1}|$ и $|OP_{0,1,-1}|$ к меньшей из этих величин не превосходит величины $(\sqrt{2} + \sin 12^\circ) / (\sqrt{2} \cdot \cos 12^\circ - \sin 12^\circ)$. Объединяя данный факт с леммами 50, 51, 52 и уже установленным первым утверждением доказываемой леммы видим, что для обоснования её второго утверждения достаточно показать, что при некоторых γ и λ , удовлетворяющих условиям

$$\gamma \geq \frac{\sqrt{2} + \sin 12^\circ}{\sqrt{2} \cos 12^\circ - \sin 12^\circ}, \quad \lambda \leq \cos(108,58336^\circ), \quad (27)$$

выполняется неравенство

$$\frac{\sqrt{1+\lambda}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\gamma+1}{\sqrt{\gamma^2+1+2\cdot\gamma\cdot\lambda}} \geq 0,9761. \quad (28)$$

Путём прямых вычислений можно показать:

$$\frac{\sqrt{2} + \sin 12^\circ}{\sqrt{2} \cos 12^\circ - \sin 12^\circ} \leq 1,3801, \quad \cos(108,58336^\circ) \geq -0,3186841. \quad (29)$$

Ввиду этого в соотношениях (27) и (28) можно положить

$$\gamma = 1,3801, \quad \lambda = -0,3186841. \quad (30)$$

Вычисления показывают, что при таких значениях γ и λ выполняются соотношения

$$\sqrt{1+\lambda} \cdot (\gamma+1) \leq 1,964558, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{\gamma^2+1+2\cdot\gamma\cdot\lambda} \geq 2,012482,$$

из которых следует (28). ■

Лемма 55. Рассмотрим тесную модель $\langle D; A \rangle$, углы нутации и отворота которой равны θ и φ . Пусть b_1 и b_{-1} – верхний и нижний упоры модели $\langle D; A \rangle$, а F_1 и F_{-1} – проекции центров этих упоров на плоскость OXY бриллиантовой системы координат $OXYZ$ данной модели. Обозначим проекцию конца внешнего вектора $\overline{\Xi_{\chi,\nu,\zeta}}$ модели $\langle D; A \rangle$ на плоскость OXY , как $P_{\chi,\nu,\zeta}$, $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$. Если

$$0^\circ \leq \theta \leq 12^\circ, \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ, \quad (31)$$

то (а) $71,41664^\circ \leq \angle P_{\zeta,0,\zeta}OP_{0,-\zeta,-\zeta} \leq 99,93893^\circ$, $\zeta = \pm 1$; (б) косинус угла σ между выходящими из O медианой и биссектрисой треугольника $P_{\zeta,0,\zeta}OP_{0,-\zeta,-\zeta}$ больше или равен $0,9824$, $\zeta = \pm 1$.

Доказательство. Ввиду леммы 30 можно ограничиться рассмотрением случая $\zeta = 1$ (рис. 30). Пусть α – угол между $\overrightarrow{F_1P_{1,0,1}}$ и отрицательным направлением оси OY , а β – угол между $\overrightarrow{F_{-1}P_{0,-1,-1}}$ и отрицательным направлением этой оси. Ясно, что

$$\text{угол между } \overrightarrow{F_1P_{1,0,1}} \text{ и } \overrightarrow{F_{-1}P_{0,-1,-1}} \text{ равен } \alpha + \beta. \quad (32)$$

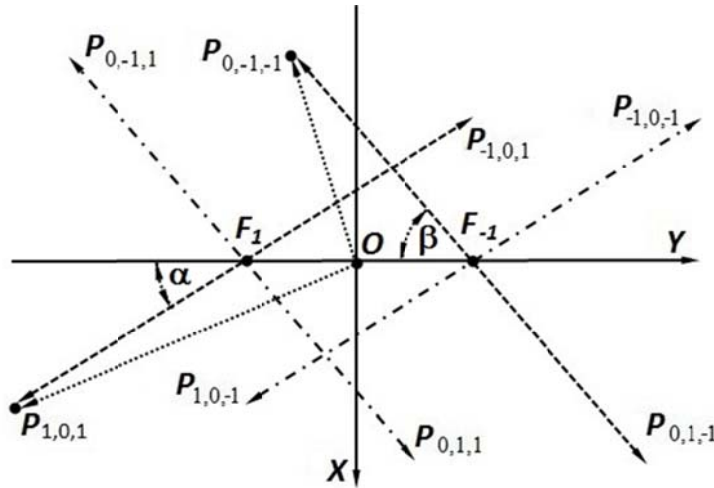


Рис. 30

Ясно также, что

$$\angle P_{1,0,1}OP_{0,-1,-1} = \angle P_{1,0,1}OF_1 + \angle P_{0,-1,-1}OF_1. \quad (33)$$

Так как α и $\angle P_{0,-1,-1}OF_1$ являются внешними углами треугольников $F_1P_{1,0,1}O$ и $F_{-1}P_{0,-1,-1}O$, то

$$\angle P_{1,0,1}OF_1 = \alpha - \angle F_1P_{1,0,1}O, \quad \angle P_{0,-1,-1}OF_1 = \beta + \angle F_{-1}P_{0,-1,-1}O.$$

Совместно с (33) эти равенства показывают, что

$$\angle P_{1,0,1}OP_{0,-1,-1} = (\alpha + \beta) + (\angle F_{-1}P_{0,-1,-1}O - \angle F_1P_{1,0,1}O). \quad (34)$$

Из (31), (32) и лемм 29, 47 вытекает, что $91,2945^\circ \geq (\alpha + \beta) \geq 88,7055^\circ$, а из (31) и леммы 53 вытекает, что $|\angle F_{-1}P_{0,-1,-1}O - \angle F_1P_{1,0,1}O| \leq 8,64443^\circ$. Совместно с (34) эти соотношения дают первое утверждение доказываемой леммы.

Перейдём к обоснованию её второго утверждения. Из лемм 29, 45, следствия из леммы 44 и неравенства треугольника вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin \theta &\leq \min(|OP_{1,0,1}|; |OP_{0,-1,-1}|) \leq \max(|OP_{1,0,1}|; |OP_{0,-1,-1}|) \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin \theta. \end{aligned}$$

Эти соотношения показывают, что отношение бóльшей из величин $|OP_{1,0,1}|$ и $|OP_{0,-1,-1}|$ к меньшей из этих величин не превосходит величины $(\sqrt{2} + \sin 12^\circ) / (\sqrt{2} \cdot \cos 12^\circ - \sin 12^\circ)$. Объединяя данный факт с леммами 50, 51, 52 и уже

установленным первым утверждением доказываемой леммы видим, что для обоснования её второго утверждения достаточно показать, что при некоторых γ и λ , удовлетворяющих условиям

$$\gamma \geq \frac{\sqrt{2} + \sin 12^\circ}{\sqrt{2} \cos 12^\circ - \sin 12^\circ}, \quad \lambda \leq \cos(91.2945^\circ), \quad (35)$$

выполняется неравенство

$$\frac{\sqrt{1+\lambda}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\gamma+1}{\sqrt{\gamma^2+1+2\cdot\gamma\cdot\lambda}} \geq 0,9761. \quad (36)$$

Путём прямых вычислений можно показать

$$\frac{\sqrt{2} + \sin 12^\circ}{\sqrt{2} \cos 12^\circ - \sin 12^\circ} \leq 1,3801, \quad \cos(99.93893^\circ) \geq -0,1726. \quad (37)$$

Ввиду этого в соотношениях (35) и (36) можно положить

$$\gamma = 1,3801, \quad \lambda = -0,1726. \quad (38)$$

Вычисления показывают, что при таких значениях γ и λ выполняются соотношения

$$\sqrt{1+\lambda} \cdot (\gamma+1) \leq 2,16498, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{\gamma^2+1+2\cdot\gamma\cdot\lambda} \geq 2,203749,$$

из которых следует (36). ■

Лемма 56. Рассмотрим тесную модель $\langle D; A \rangle$, углы нутации и отворота которой равны θ и φ . Пусть b_1 и b_{-1} – верхний и нижний упоры модели $\langle D; A \rangle$, а F_1 и F_{-1} – проекции центров этих упоров на плоскость OXY бриллиантовой системы координат $OXYZ$ данной модели. Обозначим проекцию конца внешнего вектора $\overline{\Xi_{\chi,\nu,\zeta}}$ модели $\langle D; A \rangle$ на плоскость OXY , как $P_{\chi,\nu,\zeta}$, $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$. Если

$$0^\circ \leq \theta \leq 12^\circ, \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ, \quad (39)$$

то (а) $71,41664^\circ \leq \angle P_{-\zeta,0,\zeta}OP_{0,-\zeta,-\zeta} \leq 91,2945^\circ$, $\zeta = \pm 1$; (б) косинус угла σ между выходящими из O медианой и биссектрисой треугольника $P_{-\zeta,0,\zeta}OP_{0,-\zeta,-\zeta}$ больше или равен $0,9824$, $\zeta = \pm 1$.

Доказательство. Ввиду леммы 30 можно ограничиться рассмотрением случая $\zeta = 1$ (рис. 31). Заметим, что

$$\text{угол между } \overline{F_1P_{-1,0,1}} \text{ и } \overline{F_{-1}P_{0,-1,-1}} \text{ равен } 180^\circ - (\angle P_{-1,0,1}F_1O + \angle P_{0,-1,-1}F_{-1}O). \quad (40)$$

Заметим также, что

$$\angle P_{-1,0,1}OP_{0,-1,-1} = 180^\circ - (\angle P_{-1,0,1}OF_{-1} + \angle P_{0,-1,-1}OF_1). \quad (41)$$

Так как $\angle P_{-1,0,1}OF_{-1}$ и $\angle P_{0,-1,-1}OF_1$ являются внешними углами треугольников $OP_{-1,0,1}F_1$ и $OP_{0,-1,-1}F_{-1}$, то

$$\angle P_{-1,0,1}OF_{-1} = \angle OP_{-1,0,1}F_1 + \angle OF_1P_{-1,0,1}, \quad \angle P_{0,-1,-1}OF_1 = \angle OP_{0,-1,-1}F_{-1} + \angle OF_{-1}P_{0,-1,-1}.$$

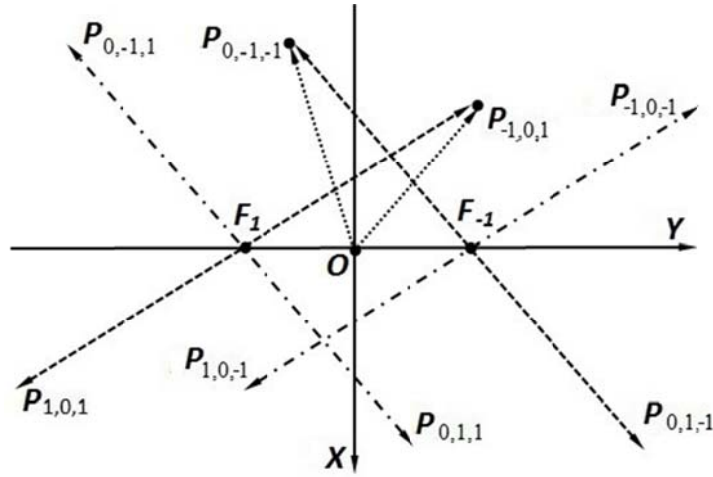


Рис. 31

Подставляя эти равенства в (41), получаем

$$\angle P_{-1,0,1}OP_{0,-1,-1} = 180^\circ - (\angle OF_1P_{-1,0,1} + \angle OF_{-1}P_{0,-1,-1}) - (\angle OF_1P_{-1,0,1} + \angle OP_{0,-1,-1}F_{-1}). \quad (42)$$

Из (40) и лемм 29, 47 вытекает, что $91,2945^\circ \geq 180^\circ - (\angle OF_1P_{-1,0,1} + \angle OF_{-1}P_{0,-1,-1}) \geq 88,7055^\circ$, а из леммы 53 вытекает, что $(\angle OF_1P_{-1,0,1} + \angle OP_{0,-1,-1}F_{-1}) \leq 17,28886^\circ$. Совместно с (41) эти соотношения дают первое утверждение доказываемой леммы.

Перейдём к обоснованию её второго утверждения. Из лемм 29, 45, следствия из леммы 44 и неравенства треугольника вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin \theta &\leq \min(|OP_{1,0,1}|; |OP_{0,-1,-1}|) \leq \max(|OP_{1,0,1}|; |OP_{0,-1,-1}|) \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin \theta. \end{aligned}$$

Эти соотношения показывают, что отношение бóльшей из величин $|OP_{1,0,1}|$ и $|OP_{0,-1,-1}|$ к меньшей из этих величин не превосходит величины $(\sqrt{2} + \sin 12^\circ) / (\sqrt{2} \cdot \cos 12^\circ - \sin 12^\circ)$. Объединяя данный факт с леммами 50, 51, 52 и уже установленным первым утверждением доказываемой леммы видим, что для обоснования её второго утверждения достаточно показать, что при некоторых γ и λ , удовлетворяющих условиям

$$\gamma \geq \frac{\sqrt{2} + \sin 12^\circ}{\sqrt{2} \cos 12^\circ - \sin 12^\circ}, \quad \lambda \leq \cos(91,2945^\circ),$$

выполняется неравенство

$$\frac{\sqrt{1+\lambda}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\gamma+1}{\sqrt{\gamma^2+1+2\cdot\gamma\cdot\lambda}} \geq 0,9824.$$

Из (37) вытекает, что в качестве таких γ и λ можно взять γ и λ , удовлетворяющие (38). Это означает, что второе утверждение доказываемой леммы является следствием второго утверждения леммы 55. ■

Лемма 57. Рассмотрим тесную модель $\langle D; A \rangle$, углы нутации и отворота которой равны θ и φ . Пусть b_1 и b_{-1} – верхний и нижний упоры модели $\langle D; A \rangle$, а F_1 и F_{-1} – проекции центров этих упоров на плоскость OXY бриллиантовой системы координат $OXYZ$ данной модели. Обозначим проекцию конца внешнего вектора $\overline{\Xi_{\chi,\nu,\zeta}}$ модели $\langle D; A \rangle$ на плоскость OXY , как $P_{\chi,\nu,\zeta}$, $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$. Если

$$0^\circ \leq \theta \leq 12^\circ, \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ, \quad (43)$$

то (а) $71,41664^\circ \leq \angle P_{-\zeta,0,\zeta}OP_{0,\zeta,-\zeta} \leq 99,93893^\circ$, $\zeta = \pm 1$; (б) косинус угла σ между выходящими из O медианой и биссектрисой треугольника $P_{-\zeta,0,\zeta}OP_{0,\zeta,-\zeta}$ больше или равен $0,9824$, $\zeta = \pm 1$.

Доказательство. Ввиду леммы 30 можно ограничиться рассмотрением случая $\zeta = 1$ (рис. 32). Пусть α – угол между положительным направлением оси OY и вектором $\overline{F_{-1}P_{0,1,-1}}$. Заметим, что

$$\text{угол между } \overline{F_1P_{-1,0,1}} \text{ и } \overline{F_{-1}P_{0,1,-1}} \text{ равен } (\alpha + \angle P_{-1,0,1}F_1O). \quad (44)$$

Так как $\angle P_{-1,0,1}OF_{-1}$ и α являются внешними углами треугольников $F_1P_{-1,0,1}O$ и $OP_{0,1,-1}F_{-1}$, то

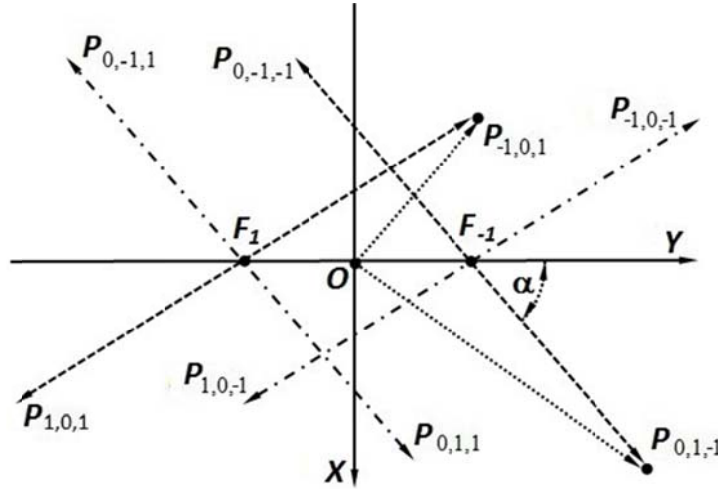


Рис. 32

$$\angle P_{-1,0,1}OF_{-1} = \angle F_1P_{-1,0,1}O + \angle P_{-1,0,1}F_1O, \quad \angle P_{0,1,-1}OF_{-1} = \alpha - \angle OP_{0,1,-1}F_{-1}.$$

Заметим также, что

$$\angle P_{0,1,-1}OP_{-1,0,1} = \angle P_{0,1,-1}OF_{-1} + \angle P_{-1,0,1}OF_{-1}. \quad (45)$$

Подставляя эти выражения в (45), получаем

$$\angle P_{0,1,-1}OP_{-1,0,1} = (\alpha + \angle P_{-1,0,1}F_1O) + (\angle F_1P_{-1,0,1}O - \angle OP_{0,1,-1}F_{-1}). \quad (46)$$

Из (44) и лемм 29, 47 вытекает, что $91,2945^\circ \geq 180^\circ - (\angle OF_1P_{-1,0,1} + \angle OF_{-1}P_{0,1,-1}) \geq 88,7055^\circ$, а из леммы 53 вытекает, что $|\angle F_1P_{-1,0,1}O - \angle OP_{0,1,-1}F_{-1}| \leq 8,64443^\circ$. Совместно с (46) это даёт первое утверждение доказываемой леммы.

Перейдём к обоснованию её второго утверждения. Из лемм 29, 45, следствия из леммы 44 и неравенства треугольника вытекает, что

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin \theta \leq \min(|OP_{-1,0,1}|; |OP_{0,1,-1}|) \leq \max(|OP_{-1,0,1}|; |OP_{0,1,-1}|) \leq \\ \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin \theta.$$

Эти соотношения показывают, что отношение бóльшей из величин $|OP_{-1,0,1}|$ и $|OP_{0,1,-1}|$ к меньшей из этих величин не превосходит величины $(\sqrt{2} + \sin 12^\circ) / (\sqrt{2} \cdot \cos 12^\circ - \sin 12^\circ)$. Объединяя данный факт с леммами 50, 51, 52 и уже установленным первым утверждением доказываемой леммы видим, что для обоснования её второго утверждения достаточно показать, что при некоторых γ и λ , удовлетворяющих условиям

$$\gamma \geq \frac{\sqrt{2} + \sin 12^\circ}{\sqrt{2} \cos 12^\circ - \sin 12^\circ}, \quad \lambda \leq \cos(99,93893^\circ),$$

выполняется неравенство

$$\frac{\sqrt{1+\lambda}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\gamma+1}{\sqrt{\gamma^2+1+2 \cdot \gamma \cdot \lambda}} \geq 0,9824.$$

Из (37) вытекает, что в качестве таких γ и λ можно взять γ и λ , удовлетворяющие (38). Это означает, что второе утверждение доказываемой леммы является следствием второго утверждения леммы 55. ■

5. ЭТАЛОННЫЕ МОДЕЛИ И ИХ СИММЕТРИЗАЦИИ

Пусть F – множество унарных двугранных углов тесной модели $\langle D; A \rangle$, октаэдрическая пара A из которой имеет вид $A = \{M; N\}$. Свяжем с каждым углом ϑ из F совокупность Q_ϑ тех столешниц этого угла, собственное полупространство которых содержит круглобриллиант D . В силу леммы 16 при любом ϑ из F в Q_ϑ имеется столешница $\{\beta_\vartheta; \overline{B}_\vartheta\}$, представляющая собой опорную n -грань круглобриллианта D . Глубину столешницы $\{\beta_\vartheta; \overline{B}_\vartheta\}$ назовём **максиглубиной** унарного двугранного угла ϑ .

Согласно теореме 7 все n -границ из порождающих наборов тетраэдров M и N являются опорными n -гранями рундиста круглобриллианта D . Со столешницами двугранных углов из F дело обстоит несколько иначе. D . Ниже покажем, что в F имеется два двугранных угла ϑ и ζ , обладающих следующим свойством. Если столешницы $\{\beta_\vartheta; \overline{B}_\vartheta\}$ и $\{\beta_\zeta; \overline{B}_\zeta\}$ углов ϑ и ζ , являются опорными n -гранями круглобриллианта D , то одна из этих столешниц касается круглобриллианта в точке его шипа, а другая – в точке его шапки. Вследствие этого при вычислении максиглубины двугранных углов из F нельзя действовать так же, как при вычислении профиля октаэдрической пары A , т.е. ограничиться рассмотрением только рундиста круглобриллианта D . Для двух углов необходимо, учитывать положение и параметры шапки и шипа круглобриллианта D .

Чтобы уменьшить количество параметров, которые необходимо учитывать, поступим следующим образом: заменим круглобриллиант D на содержащую его фигуру V , зависящую от меньшего количества параметров. Исходя из формы круглобриллианта и границ значений её параметров (см. рис. 9) возьмём в качестве V комбинацию рундиста круглобриллианта D и двух конусов (рис. 33). Назовём V **веретеном** круглобриллианта D , а вошедший в V рундист круглобриллианта D – рундистом данного веретена. При этом верхнее (соответственно нижнее) основание рундиста круглобриллианта D назовём **верхним** (соответственно **нижним**) основанием рундиста веретена V . Тот из конусов, входящих в веретено V , основанием которого является верхнее (соответственно нижнее) основание его рундиста назовём **верхним** (соответственно **нижним**) **конусом** веретена. Пару $\langle V; A \rangle$, получающуюся из тесной модели $\langle D; A \rangle$ в результате замены D на его веретено V , договоримся называть **симметризацией** модели $\langle D; A \rangle$.

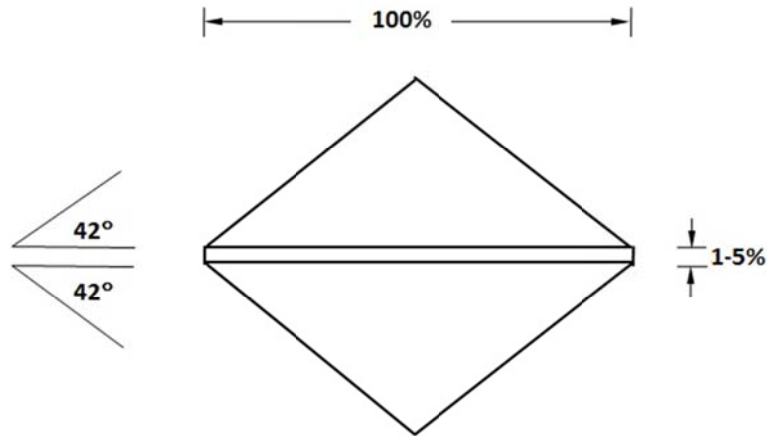


Рис. 33

Ниже будет показано, что V принадлежит пересечению собственных полупространств n -граней из порождающих наборов тетраэдров M и N . Ввиду леммы 16 и свойства 1 последнее обстоятельство означает, что среди столешниц всякого унарного двугранного угла ϑ из F найдётся столешница $\{\gamma_\vartheta; \overline{G_\vartheta}\}$, являющаяся опорной n -гранью веретена V . Назовём глубину столешницы $\{\gamma_\vartheta; \overline{G_\vartheta}\}$ **срезаемостью** унарного двугранного угла ϑ . Сравнивая указанные на рис. 9 возможные значения параметров круглобриллианта D с указанными на рис. 33 возможными значениями параметров его веретена V , видим, что $D \subseteq V$. Это означает, что имеет место такой факт.

Лемма 58. Срезаемость унарного двугранного угла тесной модели можно рассматривать, как нижнюю оценку максиглубины этого двугранного угла. ■

Сформулированные в конце пункта 1 теоремы 4 и 6 сводят вопрос о возможности допустимого вложения круглобриллианта в октаэдрическую пару к сравнению линейных параметров этой октаэдрической пары с линейными параметрами октаэдрических пар из тесных моделей. В [3] показано, что при этом не обязательно использовать всё множество тесных моделей – можно ограничиться довольно узким подмножеством множества всех тесных моделей. Элементы данного подмножества назовём **эталонными моделями**. Точное определение **эталонной модели** будет дано ниже. Основная цель настоящего пункта – выявление достаточно точной нижней границы срезаемостей унарных двугранных углов **эталонных моделей**.

Для облегчения чтения разобьём путь, ведущий к достижению основной цели настоящего пункта, на шесть шагов. Первый шаг будет играть вспомогательную роль. На этом шаге опишем свойства опорных n -граней ряда специальных объектов. На втором шаге установим некоторые утверждения о связи тесных моделей с их симметризациями. На третьем шаге сформулируем условия, при которых тесная модель считается **эталонной моделью**. На четвёртом шаге оценим срезаемости одноупорных унарных двугранных углов **эталонных моделей**. На пятом шаге оценим срезаемости двухупорных двугранных углов **эталонных моделей**. На шестом шаге приведём доказательство теоремы 10. Для наглядности изобразим последовательность указанных шагов в виде блок-схемы (рис. 34).

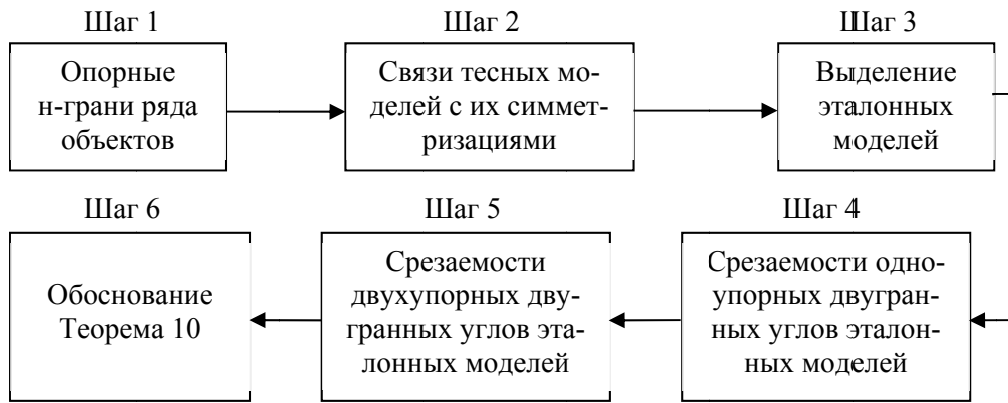


Рис. 34

Приступим к изложению первого шага данной блок-схемы. Для удобства дальнейших ссылок, оформим в виде леммы следующее очевидное свойство опорных n -граней шаров.

Лемма 59. Если $\{\beta; \vec{B}\}$ – опорная n -грань шара s с центром в точке O , то плоскость β имеет с шаром s ровно одну общую точку Q , причём (а) точка Q принадлежит поверхности шара s ; (б) вектор \vec{OQ} положительно коллинеарен вектору \vec{B} .

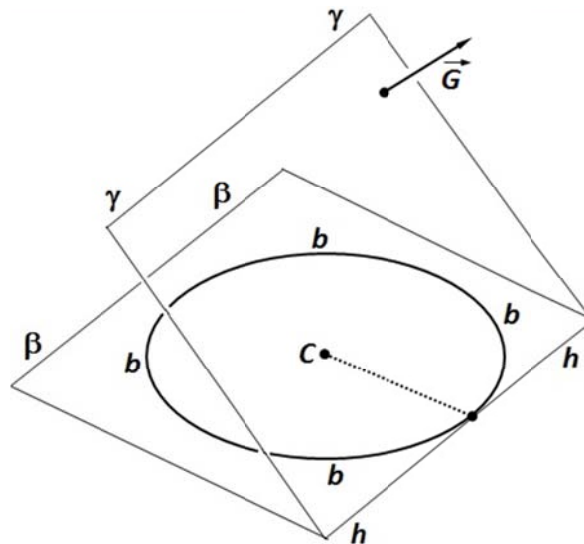


Рис. 35

Обратим внимание ещё на одно очевидное свойство опорных n -граней кругов, вытекающее посредственно из определения опорной n -границы.

Лемма 60. Рассмотрим круг b ненулевого радиуса с центром в точке C , плоскость β , содержащую этот круг, и его опорную n -грань $\{\gamma; \vec{G}\}$ (рис. 35). Если угол между плоскостями β и γ не равен 0 , то плоскости β и γ пересекаются по касательной h круга b . ■

С помощью теоремы о трёх перпендикулярах данную лемму можно следующим образом дополнить.

Лемма 61. Рассмотрим круг b ненулевого радиуса с центром в точке C , плоскость β , содержащую этот круг, и опорную n -грань $\{\gamma; \vec{G}\}$ данного круга. Если угол ζ между

плоскостями β и γ не равен 0, то касательная h круга b , по которой пересекаются плоскости β и γ , перпендикулярна плоскости CFA , где F – точка касания круга b с прямой h , а A – точка пересечения оси t круга b с плоскостью γ (рис. 36). ■

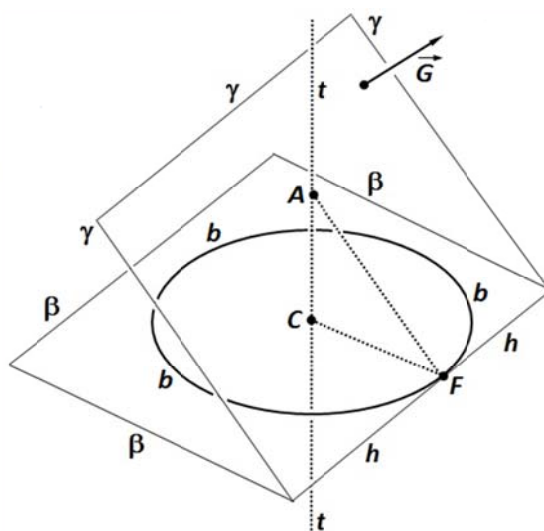


Рис. 36

Используя леммы 59, 60 и 61, не слишком сложно установить такое важное свойство опорных n -граней сечений шаров.

Лемма 62. Рассмотрим шар s с центром в начале O системы координат $OXYZ$. Пусть u – сечение шара s , перпендикулярное оси OZ , а a – проекция этого сечения на плоскость OXY . Выделим на поверхности шара s точку N , не лежащую на оси OZ . Предположим, что J и L – проекции точки N на сечение u и плоскость OXY (рис. 37). Рассмотрим луч, выходящий из центра C сечения u и проходящий через точку J , а также луч, выходящий из O и проходящий через точку L . Пусть T и F – точки пересечения лучей CJ и OL с границами кругов u и a . Если в опорной n -гране $\{\gamma; \vec{G}\}$ сечения u вектор \vec{G} положительно коллинеарен вектору \vec{ON} , то (а) плоскость γ касается сечения u в единственной точке T ; (б) точка F является проекцией точки N на плоскость OXY ; (в) луч OF является проекцией луча CT на плоскость OXY . ■

Следствие. В условиях данной леммы пересечение плоскости γ с плоскостью сечения u представляет собой касательную круга u , причём точкой касания является T . ■

Из свойства 2 вытекает следующий факт, касающийся медиан треугольников.

Лемма 63. Если ABC – лежащий в пространстве треугольник, а $A^*B^*C^*$ – его проекция на плоскость α , то проекциями на плоскость α медиан треугольника ABC будут медианы треугольника $A^*B^*C^*$. ■

Сопоставляя лемму 59 с определением столешницы угла, получаем такое утверждение об опорных n -гранях шаров.

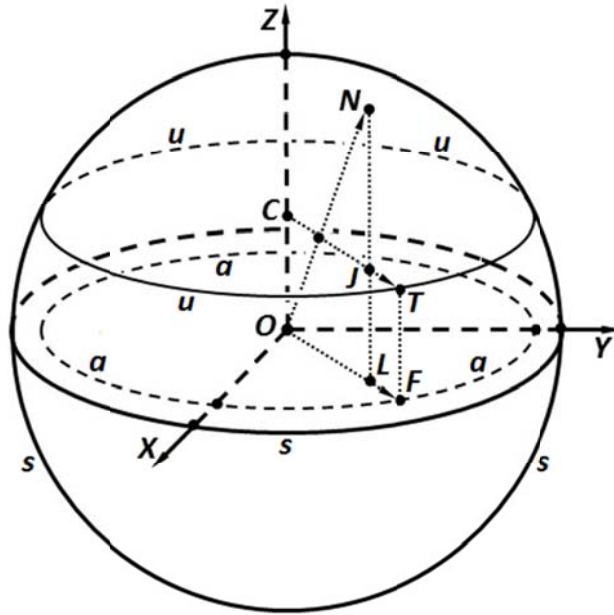


Рис. 37

Лемма 64. Рассмотрим шар s с центром в точке O . Пусть $\{\beta; \vec{B}\}$ и $\{\gamma; \vec{G}\}$ – опорные n -грани шара s , а ϑ – двугранный угол, порождающий набор которого состоит из этих n -граней. Предположим, что плоскости β и γ касаются шара s в точках T_α и T_β . Если $\{\lambda; \vec{L}\}$ – столешница угла ϑ , а M – середина отрезка $T_\alpha T_\beta$, то векторы \vec{OM} и \vec{L} положительно коллинеарны. ■

Совместно с леммами 62 и 63 данная лемма позволяет установить следующий факт.

Теорема 17. Рассмотрим шар s с центром в начале O системы координат $OXYZ$ и сечение u этого шара, перпендикулярное оси OZ . Пусть C – центр сечения u , а a – проекция этого сечения на плоскость OXY . Выделим на поверхности шара s точки T и Q , расположенные не симметрично относительно оси OZ . Предположим, что P и F – проекции точек T и Q на плоскость сечения u , а H и V – проекции точек T и Q на плоскость OXY . Рассмотрим середину M отрезка PF , середину N отрезка HV , точку J , где луч CM пересекает границу круга u , и точку K , где луч ON пересекает границу круга a (рис. 38). Пусть ϑ – двугранный угол, порождающий набор которого состоит из n -граней $\{\beta; \vec{B}\}$ и $\{\gamma; \vec{G}\}$, где векторы \vec{B} и \vec{G} положительно коллинеарны векторам \vec{OT} и \vec{OQ} . Если столешница $\{\lambda; \vec{L}\}$ угла ϑ является опорной n -гранью сечения u , то (а) плоскость λ касается сечения u в единственной точке J ; (б) точка K является проекцией на точки J на плоскость OXY ; (в) векторы \vec{OP} , \vec{OF} и \vec{OK} являются проекциями на плоскость OXY векторов \vec{CT} , \vec{CQ} и \vec{CJ} . ■

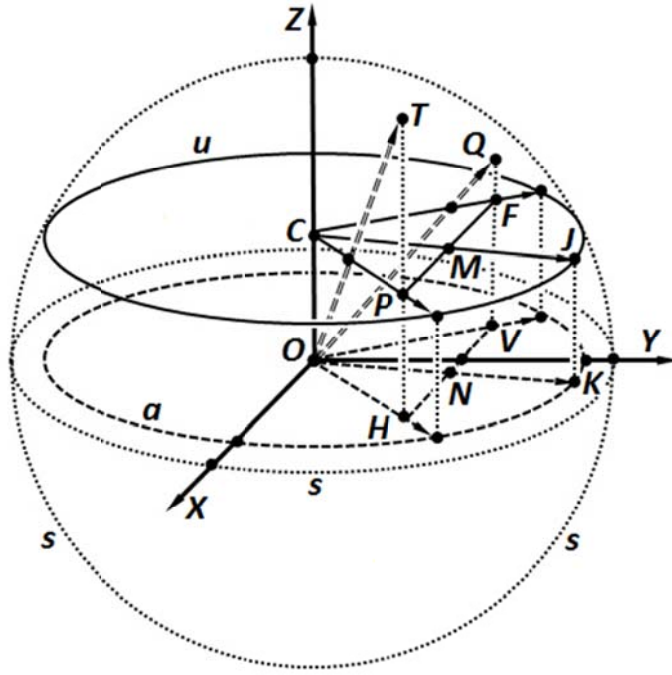


Рис. 38

В дальнейшем эта теорема, как правило, будет применяться вместе с такой леммой.

Лемма 65. Пусть прямые a и b пересекаются в точке N и касаются круга s радиуса R в точках A и B . Рассмотрим какие-либо точки T и F , лежащие на радиусах OA и OB круга s . Предположим, что угол TOF равен σ , а угол между медианой OM треугольника TOF и его биссектрисой OE равен ζ . Выделим перпендикулярную OM прямую h . Если касательная d круга s параллельна прямой h , то расстояние r от O до h удовлетворяет соотношению $r = (R/\cos(\sigma/2)) \cdot \cos \zeta$ (рис. 39).

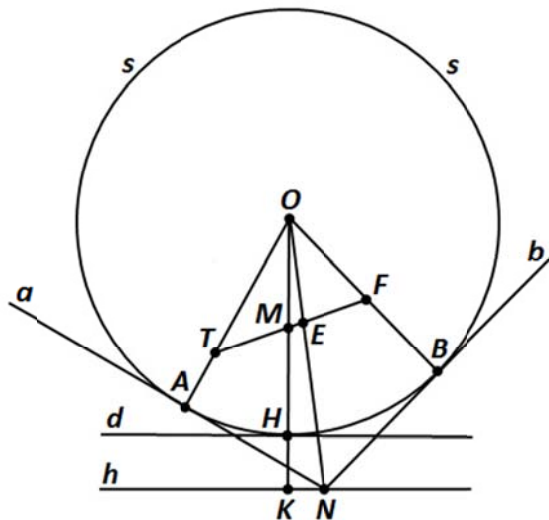
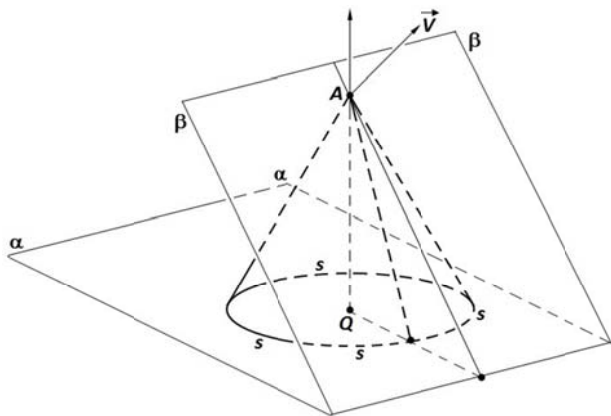


Рис. 39

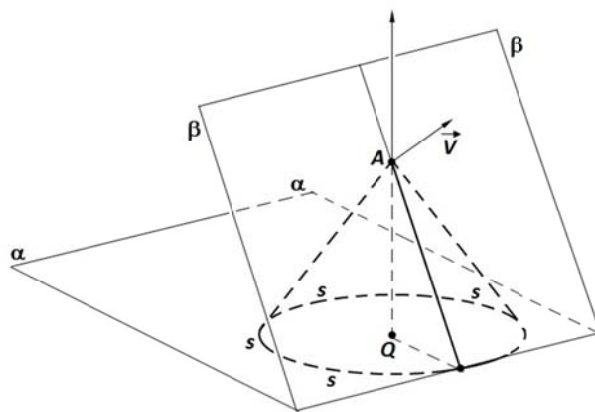
Доказательство. Ясно, что биссектриса OE треугольника TOF лежит на отрезке ON . Сопоставляя это с перпендикулярностью OB и b , получаем: $|ON| = R/\cos(\sigma/2)$. Из

прямоугольного треугольника OKN вытекает: $|OK| = |ON| \cdot \cos \zeta$. Сопоставляя это с выражением для $|ON|$ и замечая, что $r = |OK|$, получаем доказываемую лемму. ■

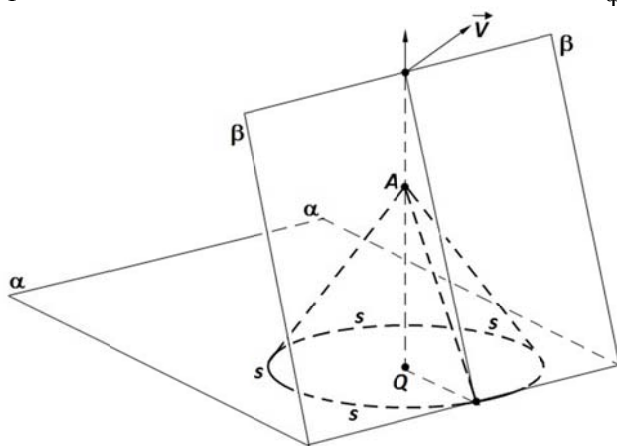
Обратим внимание также на следующие две достаточно очевидные леммы, одна из которых касается опорных n -граней конусов, а другая – опорных n -граней кругов.



фиг. 1



фиг. 2



фиг. 3

Рис. 40

Лемма 66. Рассмотрим прямой круговой конус с вершиной в точке A и основанием s , представляющим собой круг с центром в точке Q . Пусть $\{\beta; \vec{V}\}$ – опорная n -грань рассматриваемого конуса. Если φ – угол между вектором \vec{V} и лучом QA , а ψ – угол между основанием конуса и его образующими, то

угол ψ равен углу между лучом QA и перпендикуляром, опущенным из точки Q на образующую конуса;

при $0 \leq \varphi < \psi$ плоскость β касается конуса только в его вершине (рис. 40, фиг. 1);

при $\varphi = \psi$ плоскость β касается конуса только по его образующей, лежащей на полуплоскости, натянутой на ось конуса и вектор \vec{V} (рис. 40, фиг. 2);

при $\psi < \varphi \leq \pi/2$ плоскость β касается конуса только в точке границы основания, лежащей на полуплоскости, натянутой на ось конуса и вектор \vec{V} (рис. 40, фиг. 3). ■

Лемма 67. Рассмотрим лежащий на плоскости α круг s радиуса R с центром в точке Q , а также n -грань $\{\beta; \vec{V}\}$, удовлетворяющую условию: вектор \vec{V} образует с осью t круга s угол $\varphi \neq 0^\circ$. Предположим, что в опорной n -грань $\{\gamma; \vec{U}\}$ круга s вектор \vec{U} положительно коллинеарен вектору \vec{V} . Выделим прямые b и g , по которым плоскости β и γ пересекаются с плоскостью α . Если d – расстояние от Q до b , а ρ – расстояние ρ между плоскостями β и γ , то $\rho = (d - R) \cdot \sin \varphi$ (см. рис. 41, где изображено сечение круга s и n -граней $\{\beta; \vec{V}\}$, $\{\gamma; \vec{U}\}$ плоскостью, натянутой на ось t и вектор \vec{V} ¹). ■

Следствие. В условиях леммы 67 ρ растёт и при росте d , и при росте φ от 0° к 90° . ■

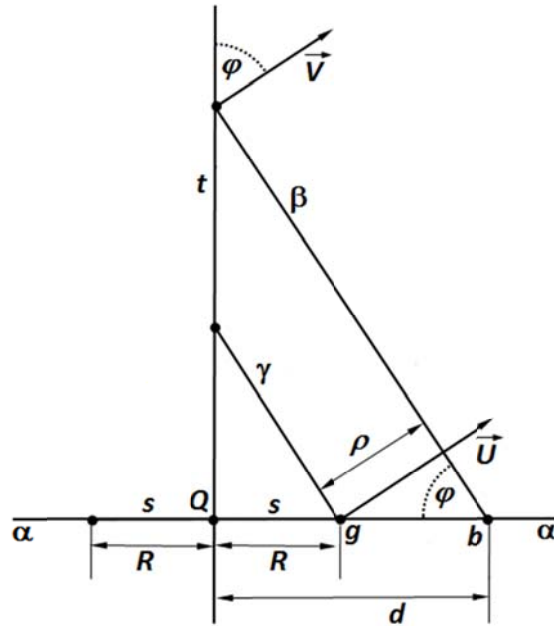


Рис. 41

Перейдём к рассмотрению опорных n -граней цилиндров. Очевиден следующий факт.

Лемма 68. Рассмотрим прямой круговой цилиндр, основаниями которого являются круги a и b с центрами в точках A и B . Пусть $\{\beta; \vec{V}\}$ – опорная n -грань рассматриваемого цилиндра. Если φ – угол между вектором \vec{V} и лучом BA , то:

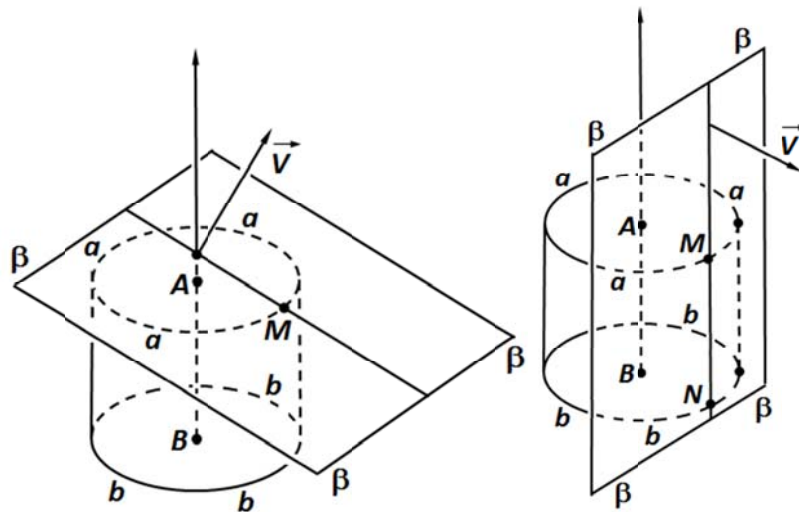
при $0 < \varphi < \pi/2$ плоскость β касается цилиндра только в точке M границы основания a , лежащей на полуплоскости, натянутой на ось цилиндра и \vec{V} (рис. 42, фиг. 1);

при $\varphi = \pi/2$ плоскость β касается цилиндра только по образующей MN его боковой поверхности, лежащей на полуплоскости, натянутой на ось цилиндра и \vec{V} (рис. 42, фиг. 2);

при $\pi/2 < \varphi < \pi$ плоскость β касается цилиндра только в точке N границы основания b , лежащей на полуплоскости, натянутой на ось цилиндра и \vec{V} (рис. 42, фиг. 3). ■

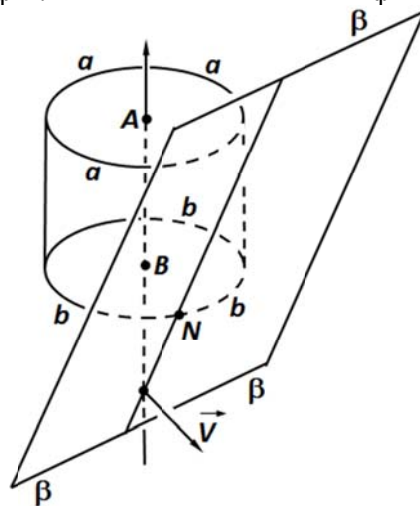
¹ Без нарушения общности можно считать, что \vec{V} и \vec{U} лежат в одной плоскости.

Следствие. Если в условиях леммы 68 угол φ не превосходит $\pi/2$, то $\{\beta; \vec{V}\}$ – опорная n -грань основания a рассматриваемого цилиндра, а если этот угол не меньше $\pi/2$, то $\{\beta; \vec{V}\}$ – опорная n -грань основания b данного цилиндра. ■



фиг. 1

фиг. 2



фиг. 3
Рис. 42

Перед тем, как применять эту лемму и следствие из неё, обратим внимание на два утверждения, первое из которых вытекает вытекающее из свойства 1, а второе – из лемм 5 и 17.

Лемма 69. Пусть M – замкнутое ограниченное множество, принадлежащее двугранному углу ϑ , порождающий набор которого состоит из n -граней $\{\beta; \vec{B}\}$ и $\{\gamma; \vec{G}\}$. Предположим, что $\{\sigma; \vec{W}\}$ – опорная n -грань множества M , у которой вектор \vec{W} положительно коллинеарен вектору \vec{G} . Тогда двугранный угол ϑ^* , порождающий набор которого состоит из n -граней $\{\beta; \vec{B}\}$ и $\{\sigma; \vec{W}\}$, удовлетворяет условиям (а) $\vartheta^* \subseteq \vartheta$; (б) $M \subseteq \vartheta^*$; (в) любая столешница $\{\lambda^*; \vec{L}^*\}$ угла ϑ^* является столешницей угла ϑ ; (г) глубина d^* сто-

лешницы $\{\lambda^*; \bar{L}^*\}$ угла \mathfrak{Q}^* будет связана с её глубиной d относительно угла \mathfrak{Q} соотношением $d^* \leq d$. ■

Лемма 70. Пусть замкнутое ограниченное множество M принадлежит двугранному углу \mathfrak{Q} , порождающий набор которого состоит из n -граней $\{\beta; \bar{B}\}$ и $\{\gamma; \bar{G}\}$. Если $\{\lambda; \bar{L}\}$ – столешница угла \mathfrak{Q} , являющаяся опорной n -гранью множества M , а f – параллельный сдвиг, то $\{f(\beta); f(\bar{B})\}$, $\{f(\gamma); f(\bar{G})\}$ и $\{f(\lambda); f(\bar{L})\}$ – опорные n -грани множества $f(M)$. При этом $\{f(\beta); f(\bar{B})\}$ и $\{f(\gamma); f(\bar{G})\}$ составляют порождающий набор двугранного угла $f(\mathfrak{Q})$, а $\{f(\lambda); f(\bar{L})\}$ является столешницей данного двугранного угла. ■

Объединяя леммы 68, 69 и 70 установим такую теорему.

Теорема 18. Пусть прямой круговой цилиндр C принадлежит двугранному углу \mathfrak{Q} , порождающий набор которого состоит из опорных n -граней $\{\beta; \bar{B}\}$ и $\{\gamma; \bar{G}\}$ данного цилиндра. Рассмотрим столешницу $\{\lambda; \bar{L}\}$ угла \mathfrak{Q} , являющуюся опорной n -гранью цилиндра C . Предположим, что a – сечение цилиндра C параллельное его основаниям, а \mathfrak{Q}^* – двугранный угол, порождающий набор которого состоит из опорных n -граней $\{\beta^*; \bar{B}^*\}$ и $\{\gamma^*; \bar{G}^*\}$ сечения a , причём \bar{B}^* и \bar{G}^* положительно коллинеарны \bar{B} и \bar{G} . Если столешница $\{\lambda^*; \bar{L}^*\}$ угла \mathfrak{Q}^* является опорной n -гранью сечения a , причём \bar{L}^* и \bar{L} положительно коллинеарны, то глубина столешницы $\{\lambda^*; \bar{L}^*\}$ угла \mathfrak{Q}^* не превосходит глубины столешницы $\{\lambda; \bar{L}\}$ угла \mathfrak{Q} .

Доказательство. Согласно следствию из леммы 68 столешница $\{\lambda; \bar{L}\}$ является опорной n -гранью одного из оснований цилиндра C . Пусть

$$\{\lambda; \bar{L}\} \text{ опорная } n\text{-грань основания } u. \quad (47)$$

В силу свойства 1 можно рассмотреть опорные n -грани $\{\beta_u; \bar{B}_u\}$ и $\{\gamma_u; \bar{G}_u\}$ основания u , где \bar{B}_u и \bar{G}_u положительно коллинеарны \bar{B} и \bar{G} . Обозначим двугранный угол, порождающий набор которого состоит из этих n -граней, как \mathfrak{Q}_u . Пользуясь леммой 16, выделим столешницу $\{\lambda_u; \bar{L}_u\}$ угла \mathfrak{Q}_u , являющуюся опорной n -гранью этого угла. Из леммы 69 вытекает:

$$\{\lambda_u; \bar{L}_u\} \text{ столешница угла } \mathfrak{Q}, \quad (48)$$

причём глубина d_u столешницы $\{\lambda_u; \bar{L}_u\}$ угла \mathfrak{Q}_u связана с её глубиной d относительно угла \mathfrak{Q} соотношением

$$d_u \leq d. \quad (49)$$

Из (47) и свойства 1 следует, что

$$\{\lambda_u; \bar{L}_u\} \text{ и } \{\lambda; \bar{L}\} \text{ эквивалентны.} \quad (50)$$

Так как C – прямой круговой цилиндр, имеется параллельный сдвиг f , переводящий основание u в сечение a . Объединяя это с леммами 17, 70 и условиями (48), (49), (50), получаем доказываемую теорему. ■

В дальнейшем эта теорема будет использоваться вместе со следующей леммой.

Лемма 71. Пусть a – сечение прямого кругового цилиндра C , параллельное его основанию, а $\{\beta; \bar{B}\}$ – опорная n -грань этого цилиндра. Предположим, что в опорной n -грань $\{\beta^*; \bar{B}^*\}$ сечения a вектор \bar{B}^* положительно коллинеарен вектору \bar{B} . Тогда всякая точка P^* , где плоскость β^* касается сечения a , является проекцией на это сечение точки P , где плоскость β касается цилиндра C .

Доказательство. Достаточно объединить леммы 68 и 5 с тем, что сечение a получается из основания цилиндра посредством параллельного сдвига вдоль оси цилиндра. ■

* * *

Приступим к изложению второго шага блок-схемы, изображённой на рис. 34. Сопоставляя указанные на рис. 9 возможные значения угловых параметров круглобриллиантов с леммами 66, 68 и теоремой 16, получаем такое свойство тесных моделей.

Теорема 19. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, в которой октаэдрическая пара A состоит из тетраэдров M и N . Предположим, что $\{\beta; \bar{B}\}$ – n -грань из объединения порождающих наборов тетраэдров M и N . Если проекция \bar{B} на ось аппликат паллиативной системы координат модели $\langle D; A \rangle$ положительно (соответственно отрицательно) коллинеарна направляющему вектору этой оси, то $\{\beta; \bar{B}\}$ является опорной n -гранью верхнего (соответственно нижнего) основания рундиста круглобриллианта D . ■

Ввиду лемм 28 и 29 эту теорему можно переформулировать следующим образом.

Теорема 20. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, в которой октаэдрическая пара A состоит из тетраэдров M и N . Предположим, что $\{\beta; \bar{B}\}$ – n -грань из объединения порождающих наборов тетраэдров M и N . Рассмотрим тот внешний вектор $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, \zeta}}$ модели $\langle D; A \rangle$, которому положительно коллинеарен вектор \bar{B} . Если конец вектора $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, \zeta}}$ принадлежит верхнему (соответственно нижнему) упору модели $\langle D; A \rangle$, то $\{\beta; \bar{B}\}$ является опорной n -гранью верхнего (соответственно нижнего) основания рундиста круглобриллианта D , причём плоскость β пересекается с круглобриллиантом D в одной единственной точке, принадлежащей этому основанию. ■

Заметим, что рундист круглобриллианта из тесной модели симметричен относительно начала паллиативной системы координат этой модели. Объединяя это с теоремой 20 и леммами 28, 30 и 5, можно показать, что октаэдрическая пара из тесной модели в каком-то смысле также симметрична относительно начала паллиативной системы координат.

Лемма 72. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, в которой октаэдрическая пара A состоит из тетраэдров M и N . Если в n -гранях $\{\beta; \bar{B}\}$ и $\{\gamma; \bar{G}\}$ из порождающих наборов тетраэдров M и N векторы \bar{B} и \bar{G} положительно коллинеарны внешним векторам $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, \zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{-\chi, -\nu, -\zeta}}$ модели $\langle D; A \rangle$, то плоскости β и γ симметричны относительно начала паллиативной системы координат модели $\langle D; A \rangle$, $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$. ■

Напомним, что ось круглобриллианта считается ориентированной по направлению от шипа к шапке. В связи с этим, для удобства дальнейших ссылок, оформим в виде леммы такое свойство веретен круглобриллиантов, вытекающее из их определения.

Лемма 73. Ось круглобриллианта являются ориентированной осью его веретена. ■

Сопоставляя эту лемму с указанными на рис. 33 угловыми параметрами веретён круглобриллиантов, а также с леммами 66, 68, теоремой 16 и леммами 28, 29 можно получить следующие два утверждения (второе из которых является для симметризаций тесных моделей аналогом теоремы 20, касающейся тесных моделей).

Теорема 21. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, в которой октаэдрическая пара A состоит из тетраэдров M и N . Если $\langle V; A \rangle$ – симметризация модели $\langle D; A \rangle$, то V принадлежит собственному полупространству любой n -грани $\{\beta; \bar{B}\}$ из объединения порождающих наборов тетраэдров M и N . ■

Теорема 22. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, в которой октаэдрическая пара A состоит из тетраэдров M и N , а $\langle V; A \rangle$ – симметризация этой модели. Предположим, что $\{\beta; \bar{B}\}$ – n -грань из объединения порождающих наборов тетраэдров M и N . Рассмотрим тот внешний вектор $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, \zeta}}$ модели $\langle D; A \rangle$, которому положительно коллинеарен вектор \bar{B} . Если конец вектора $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, \zeta}}$ принадлежит верхнему (соответственно нижнему) упору модели $\langle D; A \rangle$, то $\{\beta; \bar{B}\}$ является опорной n -гранью верхнего (соответственно нижнего) основания рундиста веретена V , причём плоскость β пересекается с веретеном V в одной единственной точке, принадлежащей этому основанию. ■

Сопоставляя эту теорему с леммой 15 и свойством 1 можно получить такой аналог леммы 16.

Лемма 74. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, а $\langle V; A \rangle$ – её симметризация. Если ϑ – двугранный угол модели $\langle D; W \rangle$, то существуют столешницы угла ϑ , являющиеся опорными n -гранями веретена V . При этом все такие столешницы представляют собой эквивалентные друг другу n -грани. ■

Заметим, что веретено из симметризации тесной модели симметрично относительно начала паллиативной системы координат этой модели. Совместно с леммами 5, 32, 72 и это позволяет получить такое утверждение о симметричности тех столешниц двугранных углов тесной модели, которые являются опорными n -гранями веретена из симметризации модели.

Теорема 23. Пусть $\langle D; A \rangle$ – тесная модель, а $\langle V; A \rangle$ – её симметризация. Предположим, что $\{\{\beta; \bar{B}\}, \{\gamma; \bar{G}\}\}$ и $\{\{\beta^*; \bar{B}^*\}, \{\gamma^*; \bar{G}^*\}\}$ – порождающие наборы двугранных углов ϑ и ϑ^* модели $\langle D; A \rangle$, а $\{\lambda; \bar{L}\}$ и $\{\lambda^*; \bar{L}^*\}$ – столешницы этих двугранных углов, являющиеся опорными n -гранями веретена V . Если векторы \bar{B} и \bar{G} положительно коллинеарны внешним векторам $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, \zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{\sigma, \tau, \xi}}$ модели $\langle D; A \rangle$, а векторы \bar{B}^* и \bar{G}^* положительно коллинеарны внешним векторам $\overrightarrow{\Xi_{-\chi, -\nu, -\zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{-\sigma, -\tau, -\xi}}$ этой модели, то (а) векторы \bar{L}^* и \bar{L} отрицательно коллинеарны; (б) плоскости λ и λ^* симметричны относительно начала палиативной системы координат модели $\langle D; A \rangle$; (в) глубина столешницы $\{\lambda; \bar{L}\}$ равна глубине столешницы $\{\lambda^*; \bar{L}^*\}$. ■

* * *

Приступим к изложению третьего шага блок-схемы, изображённой на рис. 34.

Определение 37. Тесную модель $\langle D; A \rangle$ назовём *эталонной моделью*, если: (а) рундист круглобриллианта D вписан в шар радиуса 1; (б) угол отворота модели $\langle D; A \rangle$ не превосходит $\pi/4$. ■

В [3] установлена такая теорема.

Теорема 24. Для любой тесной модели $\langle D; A \rangle$, имеется эталонная модель $\langle D^*; A^* \rangle$ такая, что либо саму эту эталонную модель, либо её зеркальное отражение можно преобразованием подобия перевести в модель равную модели $\langle D; A \rangle$. ■

Совместно с теоремой 6 данная теорема показывает, что имеет место следующий факт.

Теорема 25. Пусть Q – октаэдрическая пара, а $(q_1; \dots; q_4; t_1; t_2)$ – её профиль. Свяжем с каждой эталонной моделью $\langle D; A \rangle$ величину μ_Q , определяемую по формуле

$$\mu_Q(\langle D; A \rangle) = \min \left(\frac{q_1}{a_1}; \dots; \frac{q_4}{a_4}; \frac{t_1}{h_1}; \frac{t_2}{h_2} \right),$$

где $(a_1; \dots; a_4; h_1; h_2)$ – профиль октаэдрической пары A из модели $\langle D; A \rangle$. Тогда для нахождения максимального круглобриллианта, который допустимо вкладывается в Q , достаточно найти эталонную модель $\langle D^*; A^* \rangle$, на которой μ_Q достигает максимума. При этом максимальный круглобриллиант, допустимо вкладываемый в Q , будет равен результату применения к круглобриллианту D^* гомотетии с коэффициентом $\mu_Q(\langle D^*; A^* \rangle)$. ■

Замечание. Так как класс эталонных моделей существенно уже класса тесных моделей, а главное, легче обозрим, данная теорема сильно облегчает задачу поиска максимального круглобриллианта, допустимо вкладываемого в какую-либо октаэдрическую пару. ■

Отметим вытекающую из Теоремы Пифагора оценку радиусов и высот рундистов круглобриллиантов из эталонных моделей.

Лемма 75. Рундист круглобриллианта калибра q вписан в шар S радиуса 1 тогда и только тогда, когда радиус рундиста равен $1/\sqrt{1+q^2}$, а расстояния от центра O шара S до оснований рундиста равны $q/\sqrt{1+q^2}$. ■

Из теорем 21 и 22 вытекает следующее обстоятельство. Если $\langle V; A \rangle$ – симметризация эталонной модели $\langle D; A \rangle$, где октаэдрическая пара A состоит из тетраэдров M и N , то всякая n -грань $\{\beta; \bar{B}\}$, входящая в порождающие наборы тетраэдров M и N , является опорной гранью веретена V , причём плоскость β касается этого веретена в одной единственной точке, принадлежащей основанию его рундиста. Объединяя леммы 28 и 29 с леммой 62 и определением эталонных моделей опишем точки касания оснований веретена V с плоскостями из n -граней, входящих в порождающие наборы тетраэдров M и N .

Теорема 26. Рассмотрим эталонную модель $\langle D; W \rangle$, где октаэдрическая пара W состоит из тетраэдров M и N , а также симметризацию $\langle V; W \rangle$ этой модели. Пусть u_1 и u_{-1} – верхнее и нижнее основания рундиста веретена V , а A_1 и A_{-1} – центры данных оснований. Выделим проекции T_1 и T_{-1} на основания u_1 и u_{-1} центров C_1 и C_{-1} верхнего и нижнего упоров b_1 и b_{-1} модели $\langle D; W \rangle$. Предположим, что $B_{\chi, \nu, \zeta}$, конец внешнего вектора $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, \zeta}}$ модели $\langle D; A \rangle$, а $\{\gamma_{\chi, \nu, \zeta}; \overrightarrow{G_{\chi, \nu, \zeta}}\}$ – та n -грань из порождающих наборов тетраэдров M и N , вектор $\overrightarrow{G_{\chi, \nu, \zeta}}$ из которой положительно коллинеарен вектору $\overrightarrow{\Xi_{\chi, \nu, \zeta}}$, $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$. Если $H_{\chi, \nu, \zeta}$ – проекция точки $B_{\chi, \nu, \zeta}$ на основание u_ζ , то точка пересечения луча $A_\zeta H_{\chi, \nu, \zeta}$ с границей круга u_ζ является той единственной точкой, в которой плоскость $\gamma_{\chi, \nu, \zeta}$ касается веретена V , $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$. ■

Замечание. Для наглядности покажем на рис. 43 те объекты из условия данной теоремы, которые лежат в верхней половине шара, описанного около рундиста веретена V (то, что можно не загромождать рисунок и ограничиться изображением только объектов из верхней половины шара вытекает из лемм 30 и 72). Такими объектами будут: (а) упор b_1 модели $\langle D; A \rangle$ и основание u_1 рундиста веретена V ; (б) точки A_1 , C_1 и T_1 ; (в) точки $B_{\chi, \nu, 1}$ и $H_{\chi, \nu, 1}$, $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; (г) лучи $A_1 H_{\chi, \nu, 1}$ и точки пересечения этих лучей с границей круга u_1 (данные точки на рис. 43 выделены, но никак не обозначены) $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$. ■

В дальнейшем потребуются также следующая лемма о векторах из столешниц двугранных углов эталонных моделей.

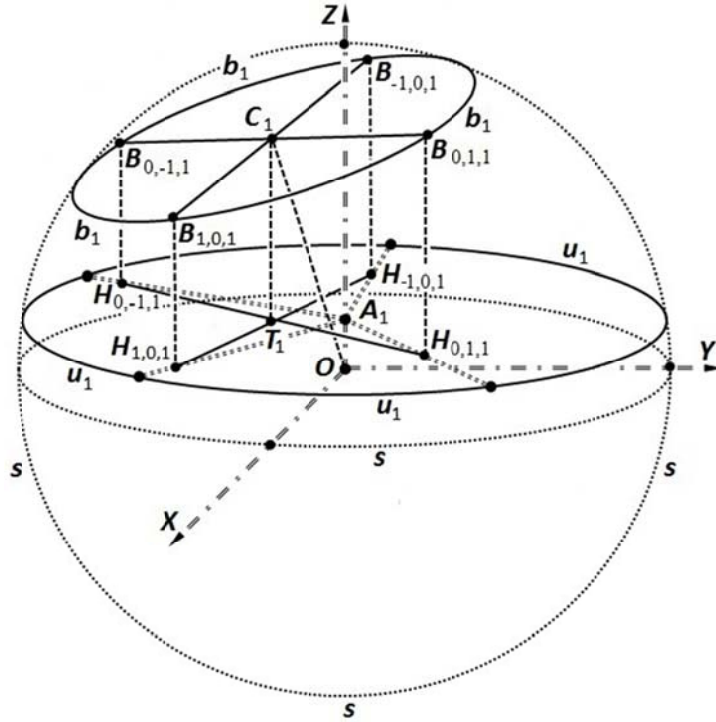


Рис. 43

Лемма 76. Если $\langle D; W \rangle$ – тесная модель, $\{\lambda; \bar{L}\}$ – столешница её двухупорного унарного двугранного угла, а \bar{E} – направляющий вектор оси круглобриллианта D , то угол σ между векторами \bar{E} и \bar{L} удовлетворяет условиям $88^\circ \leq \sigma \leq 102^\circ$.

Доказательство. Достаточно объединить лемму 36 со следствием из леммы 38 и заметить, что эталонная модель является тесной. ■

* * *

Приступим к изложению четвёртого шага блок-схемы, изображённой на рис. 34. Прежде всего, обратим внимание на два не слишком сложно устанавливаемых геометрических факта.

Лемма 77. Пусть S и s – два концентрических шара радиусов R и r , где $r \leq R$. Если P – точка шара s , а α – плоскость, не пересекающаяся с внутренностью шара S , то расстояние от P до α не меньше разности $R - r$. ■

Лемма 78. Рассмотрим двугранные углы \mathfrak{D} и \mathfrak{D}^* , порождающие наборы которых имеют вид $\{\{\alpha; \bar{A}\}, \{\beta; \bar{B}\}\}$ и $\{\{\alpha^*; \bar{A}^*\}, \{\beta^*; \bar{B}^*\}\}$, где \bar{A}^* и \bar{B}^* положительно коллинеарны соответственно \bar{A} и \bar{B} . Пусть P – точка, принадлежащая углу \mathfrak{D} , а d_α и d_β – её расстояния до плоскостей α и β . Выделим столешницы $\{\lambda; \bar{L}\}$ и $\{\lambda^*; \bar{L}^*\}$ углов \mathfrak{D} и \mathfrak{D}^* , содержащие рёбра этих углов. Если расстояния t_α и t_β точки P до плоскостей α^* и β^* связаны с расстояниями d_α и d_β точки P до плоскостей α и β неравенствами $t_\alpha \geq d_\alpha$ и $t_\beta \geq d_\beta$, то (а) \bar{L} и \bar{L}^* положительно коллинеарны; (б) $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}^*$; (в) расстояние от точки P до плоскости λ^* не меньше расстояния от точки P до плоскости λ (см. рис. 44, где изображено сече-

ние двугранных углов ϑ и ϑ^* плоскостью, проходящей через точку P перпендикулярно рёбрам данных углов). ■

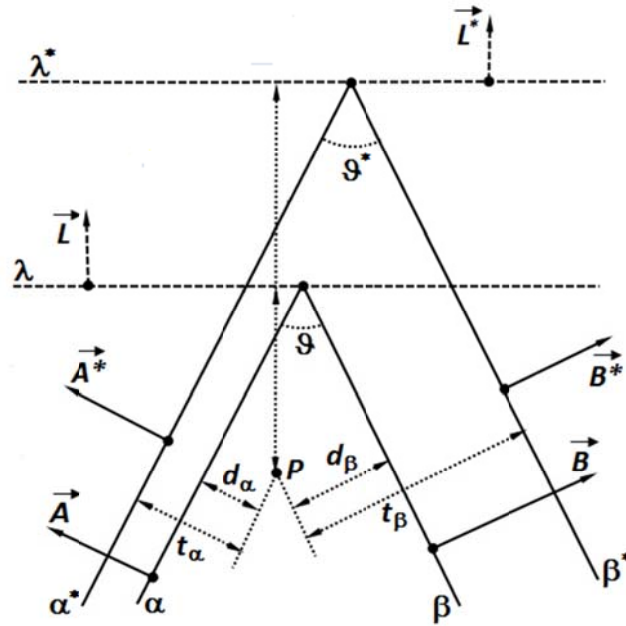


Рис. 44

В [3] показано, что эталонные модели обладают следующим свойством.

Теорема 27. Пусть $\langle D; W \rangle$ – эталонная модель, в которой октаэдрическая пара W состоит из тетраэдров M и N , а калибр круглобриллианта D равен q . Если углы нутации и отворота модели $\langle D; W \rangle$ равны θ и ϕ , то расстояние ρ от центра круглобриллианта D до плоскости, входящей в какую-либо n -грань из порождающих наборов тетраэдров M и N , удовлетворяет неравенству $\rho > \sqrt{1/(1+q^2/4) - (\cos \theta + \sqrt{2} \cdot \cos \phi \cdot \sin \theta)^2 / (1+q^2/4)}$. ■

Объединяя эту теорему с леммой 78, получаем такой факт.

Лемма 79. Пусть $\langle D; W \rangle$ – тесная модель, θ и ϕ – углы её нутации и отворота, а q – калибр круглобриллианта D . Рассмотрим двугранный угол ϑ^* модели $\langle D; W \rangle$, порождающий набор которого состоит из n -граней $\{\alpha^*; \vec{A}^*\}$ и $\{\beta^*; \vec{B}^*\}$. Предположим, что s – шар с центром в центре O круглобриллианта D , радиус R которого удовлетворяет неравенству

$$R \leq \sqrt{1/(1+q^2/4) - (\cos \theta + \sqrt{2} \cdot \cos \phi \cdot \sin \theta)^2 / (1+q^2/4)}.$$

Выделим двугранный угол ϑ , порождающий набор которого состоит из опорных n -граней $\{\alpha; \vec{A}\}$ и $\{\beta; \vec{B}\}$ шара s , где векторы \vec{A} и \vec{B} положительно коллинеарны соответственно векторам \vec{A}^* и \vec{B}^* . Если плоскости λ и λ^* , входящие в столешницы $\{\lambda; \vec{L}\}$ и $\{\lambda^*; \vec{L}^*\}$ углов ϑ и ϑ^* содержат рёбра этих углов, то расстояние ρ^* от точки O до плоскости λ^* связано с расстоянием ρ от точки O до плоскости λ соотношением $\rho^* \geq \rho$. ■

Из лемм 35, 38 и 66 вытекает ещё одно свойство столешниц двугранных углов эталонных моделей (корректность формулировки этого свойства следует из леммы 74).

Лемма 80. Пусть $\langle D; W \rangle$ – тесная модель, а $\langle V; W \rangle$ – её симметризация. Рассмотрим одноупорный унарный двугранный угол \mathfrak{A} модели $\langle D; W \rangle$, порождающий набор которого состоит из n -граней $\{\alpha^*; \bar{A}^*\}$ и $\{\beta^*; \bar{B}^*\}$. Выделим столешницу $\{\lambda; \bar{L}\}$ угла \mathfrak{A} , являющуюся опорной n -гранью веретена V . Если концы внешних векторов модели $\langle D; W \rangle$, которым положительно коллинеарны \bar{A} и \bar{B} , принадлежат верхнему (соответственно нижнему) упору модели $\langle D; W \rangle$, то плоскость λ касается веретена V только в вершине верхнего (соответственно нижнего) конуса этого веретена. ■

Напомним, что основная цель настоящего шага блок-схемы, изображённой на рис. 34 – это оценка срезаемости разгороженных одноупорных двугранных углов эталонных моделей. Эту оценку даёт следующая теорема.

Теорема 28. Пусть $\langle D; W \rangle$ – эталонная модель, а $\langle V; W \rangle$ – её симметризация. Если \mathfrak{A} – одноупорный унарный двугранный угол модели $\langle D; W \rangle$, то срезаемость угла \mathfrak{A} больше или равна 0,22449.

Доказательство. Исходя из указанных на рис. 33 возможных значений параметров веретена круглобриллианта и леммы 75 можно вычислить, что расстояние r от центра рундиста веретена V до вершины его конуса удовлетворяет неравенству

$$r \leq 0,95051. \quad (51)$$

Пусть $\{\lambda; \bar{L}\}$ – та столешница двугранного угла \mathfrak{A} , плоскость λ из которой содержит ребро этого угла. Так как $\langle D; W \rangle$ – эталонная модель углы θ и φ её нутации и отворота удовлетворяют неравенствам $0^\circ \leq \theta \leq 12^\circ$, $0^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$. При этом согласно рис. 9 калибр q круглобриллианта D удовлетворяет ограничениям $0,01 \leq q \leq 0,05$. Объединяя это с теоремой 27 и леммой 79, прямыми вычислениями можно показать, что расстояние R от центра рундиста веретена V до плоскости λ удовлетворяет ограничениям $R \geq 1,175$. Совместно с леммами 77, 80 и (51) это даёт доказываемую теорему. ■

* * *

Перейдём к изложению пятого шага блок-схемы, изображённой на рис. 34. Из теоремы 22 и определения двухупорного унарного двугранного угла вытекает такой факт.

Лемма 81 Пусть $\langle D; A \rangle$ – эталонная модель, а $\langle V; A \rangle$ – её симметризация. Порождающий набор любого двухупорного унарного двугранного угла модели $\langle D; A \rangle$ состоит из опорных n -граней рундиста веретена V . ■

Сопоставляя указанные на рис. 33 возможные значения параметров веретён круглобриллиантов с леммами 76, 67 и 68, получаем следующее утверждение о столешницах двухупорных унарных двугранных углов эталонных моделей.

Лемма 82. Пусть $\langle D; A \rangle$ – эталонная модель, а $\langle V; A \rangle$ – её симметризация. Столешница двухупорного унарного двугранного угла эталонной модели является опорной n -гранью рундиста веретена V , тогда и только тогда, когда эта столешница является опорной n -гранью рундиста веретена V . ■

Договоримся о такой терминологии.

Определение 38. Пусть $\langle D; A \rangle$ – эталонная модель, $\langle V; A \rangle$ – её симметризация, а $OXYZ$ – бриллиантовая система координат данной модели. Сечение рундиста веретена V плоскостью OXY назовём *серединным сечением* этого рундиста. ■

Объединяя леммы 82 и 81 с теоремой 18, получаем следующую теорему, на которой будет основано получение оценок срезаемости двухупорных унарных двугранных углов эталонных моделей.

Теорема 29. Пусть $\langle D; A \rangle$ – эталонная модель, $\langle V; A \rangle$ – её симметризация, а $\{\{\beta; \vec{B}\}; \{\gamma; \vec{G}\}\}$ – порождающий набор двухупорного унарного двугрannого угла \mathfrak{A} модели $\langle D; A \rangle$. Предположим, что \mathfrak{A}^* – двугранный угол, порождающий набор которого состоит из опорных n -граней $\{\beta^*; \vec{B}^*\}$ и $\{\gamma^*; \vec{G}^*\}$ срединного сечения а рундиста веретена V , причём векторы \vec{B}^* и \vec{G}^* положительно коллинеарны векторам \vec{B} и \vec{G} . Если столешница $\{\lambda^*; \vec{L}^*\}$ угла \mathfrak{A}^* является опорной n -гранью сечения а, то глубина этой столешницы не превосходит срезаемости угла \mathfrak{A} . ■

При применении этой теоремы будет использоваться такой факт, вытекающий из теоремы 26 и леммы 71.

Лемма 83. Пусть $\langle D; W \rangle$ – эталонная модель, $\langle V; W \rangle$ – её симметризация, а a – срединное сечение рундиста веретена V . Предположим, что O – центр сечения a , а $P_{\chi, \nu, \zeta}$ – проекция на это сечение конца внешнего вектора $\vec{\Xi}_{\chi, \nu, \zeta}$ модели $\langle D; A \rangle$, $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$. Если $\{\gamma_{\chi, \nu, \zeta}; \vec{G}_{\chi, \nu, \zeta}\}$ – опорная n -грань сечения a , у которой вектор $\vec{G}_{\chi, \nu, \zeta}$ положительно коллинеарен вектору $\vec{\Xi}_{\chi, \nu, \zeta}$, то точка пересечения луча $OP_{\chi, \nu, \zeta}$ с границей сечения a является той единственной точкой, в которой плоскость $\gamma_{\chi, \nu, \zeta}$ касается данного сечения. ■

Напомним, что согласно лемме 34 двухупорные унарные двугранные углы тесной модели можно разделить на четыре класса (в зависимости от того, какое из четырёх условий, леммы, выполняется для порождающего набора угла). Это напоминание повышает наглядность формулировки приведённой ниже леммы 84, в которой рассматриваются двугранные углы, обладающие таким свойством: векторы n -граней из порождающих наборов этих углов положительно коллинеарны векторам n -граней из порождающих наборов двухупорных двугранных углов эталонной модели. Обоснование леммы 84 вытекает из леммы 83 и теоремы 17.

Лемма 84. Пусть $\langle D; W \rangle$ – эталонная модель, $\langle V; W \rangle$ – её симметризация, a – срединное сечение рундиста веретена V , а O – центр сечения a . Предположим, что $P_{\chi, \nu, \zeta}$ – проекция на сечение a конца внешнего вектора $\vec{\Xi}_{\chi, \nu, \zeta}$ модели $\langle D; A \rangle$, а $u_{\chi, \nu, \zeta}$ – прямая, лежащая в плоскости сечения a и касающаяся этого сечения в точке, где луч $OP_{\chi, \nu, \zeta}$ пересекается с границей данного сечения, $\chi = 0, \pm 1$; $\nu = 0, \pm 1$; $\chi \cdot \nu = 0$; $\chi \neq \nu$; $\zeta = \pm 1$. Рассмотрим двугранный угол \mathfrak{A} , порождающий набор которого состоит из опорных n -граней $\{\alpha; \vec{A}\}$ и

$\{\beta; \bar{B}\}$ сечения a . Если $\{\lambda; \bar{L}\}$ – столешница глубины 0 угла ϑ , а t – прямая, по которой плоскость λ пересекается с плоскостью сечения a , то: (а) в случае, когда векторы \bar{A} и \bar{B} положительно коллинеарны векторам $\overrightarrow{\Xi_{\zeta,0,\zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{0,\zeta,-\zeta}}$, прямая t содержит точку пересечения касательных $u_{\zeta,0,\zeta}$ и $u_{0,\zeta,-\zeta}$, при этом t перпендикулярна медиане треугольника $P_{\zeta,0,\zeta}OP_{0,\zeta,-\zeta}$, $\zeta = \pm 1$; (б) в случае, когда векторы \bar{A} и \bar{B} положительно коллинеарны векторам $\overrightarrow{\Xi_{\zeta,0,\zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{0,-\zeta,-\zeta}}$, прямая t содержит точку пересечения касательных $u_{\zeta,0,\zeta}$ и $u_{0,-\zeta,-\zeta}$, при этом t перпендикулярна медиане треугольника $P_{\zeta,0,\zeta}OP_{0,-\zeta,-\zeta}$, $\zeta = \pm 1$; (в) в случае, когда векторы \bar{A} и \bar{B} положительно коллинеарны векторам $\overrightarrow{\Xi_{0,-\zeta,-\zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{-\zeta,0,\zeta}}$, прямая t содержит точку пересечения касательных $u_{\zeta,0,\zeta}$ и $u_{-\zeta,0,-\zeta}$, при этом t перпендикулярна медиане треугольника $P_{0,-\zeta,-\zeta}OP_{-\zeta,0,\zeta}$, $\zeta = \pm 1$; (г) в случае, когда векторы \bar{A} и \bar{B} положительно коллинеарны векторам $\overrightarrow{\Xi_{-\zeta,0,\zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{0,\zeta,-\zeta}}$, прямая t содержит точку пересечения касательных $u_{-\zeta,0,-\zeta}$ и $u_{0,\zeta,-\zeta}$, при этом t перпендикулярна медиане треугольника $P_{-\zeta,0,\zeta}OP_{0,\zeta,-\zeta}$, $\zeta = \pm 1$. ■

Используя данную лемму, установим следующий факт.

Лемма 85. Если имеют место условия леммы 84, то (а) в случае, когда векторы \bar{A} и \bar{B} положительно коллинеарны векторам $\overrightarrow{\Xi_{\zeta,0,\zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{0,\zeta,-\zeta}}$, расстояние от прямой t до центра O сечения a больше или равно 1,3616, $\zeta = \pm 1$; (б) в случае, когда векторы \bar{A} и \bar{B} положительно коллинеарны векторам $\overrightarrow{\Xi_{\zeta,0,\zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{0,-\zeta,-\zeta}}$, расстояние от прямой t до центра O сечения a больше или равно 1,206, $\zeta = \pm 1$; (в) в случае, когда векторы \bar{A} и \bar{B} положительно коллинеарны векторам $\overrightarrow{\Xi_{0,-\zeta,-\zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{-\zeta,0,\zeta}}$, расстояние от прямой t до центра O сечения a больше или равно 1,206, $\zeta = \pm 1$; (г) в случае, когда векторы \bar{A} и \bar{B} положительно коллинеарны векторам $\overrightarrow{\Xi_{-\zeta,0,\zeta}}$ и $\overrightarrow{\Xi_{0,\zeta,-\zeta}}$, расстояние от прямой t до центра O сечения a больше или равно 1,206, $\zeta = \pm 1$.

Доказательство. Первое утверждение доказываемой леммы вытекает из первого утверждения леммы 84 и лемм 54, 65, 75. Второе утверждение доказываемой леммы вытекает из второго утверждения леммы 84 и лемм 55, 65, 75. Третье утверждение доказываемой леммы вытекает из третьего утверждения леммы 84 и лемм 56, 65, 75. Четвёртое утверждение доказываемой леммы вытекает из четвёртого утверждения леммы 84 и лемм 57, 65, 75. ■

Совместно с леммами 67, 76 и 75 данная лемма показывает, что имеет место такое утверждение.

Лемма 86. Если в условиях леммы 84 столешница $\{\lambda^*; \bar{L}^*\}$ угла ϑ является опорной n -гранью сечения a , то глубина этой столешницы больше или равна 0,2058. ■

Объединяя эту лемму с теоремой 29 получаем следующее свойство двухупорных унарных двугранных углов эталонных моделей.

Теорема 30. Пусть $\langle D; W \rangle$ – эталонная модель, а $\langle V; W \rangle$ – её симметризация. Если ϑ – двухупорный унарный двугранный угол модели $\langle D; W \rangle$, то срезаемость угла ϑ больше или равна 0,2058. ■

* * *

Приступим к изложению шестого шага блок-схемы, изображённой на рис. 34. Из теорем 28 и 30 вытекает следующее свойство эталонных моделей.

Лемма 87. Пусть $\langle D; W \rangle$ – эталонная модель, а $\langle V; W \rangle$ – её симметризация. Если ϑ – унарный двугранный угол модели $\langle D; W \rangle$, то срезаемость угла ϑ больше или равна 0,2. ■

Объединяя эту лемму с леммой 58, получаем такой факт.

Лемма 88. Если $\langle D; W \rangle$ – эталонная модель, а ϑ – унарный двугранный угол этой модели, то максиглубина угла ϑ больше или равна 0,2. ■

Совместно с леммой 75 данная лемма даёт следующее утверждение.

Лемма 89. Пусть $\langle D; W \rangle$ – эталонная модель, ϑ – унарный двугранный угол этой модели, а f – гомотетия с коэффициентом q . Если к модели $\langle D; W \rangle$ применить гомотетию с коэффициентом a , то получим тесную модель, в которой радиус круглобриллианта D равен $a/\sqrt{1+q^2}$, где q – калибр этого круглобриллианта, а максиглубина угла ϑ больше или равна $0,2 \cdot a$. ■

Обратим внимание также на такую лемму.

Лемма 90. Пусть Q – октаэдрическая пара, ϑ^* – унарный двугранный угол этой пары, а $\langle D; A \rangle$ – тесная модель. Если f – евклидово преобразование, параллельно вкладывающее октаэдрическую пару A в октаэдрическую пару Q , то: (а) в октаэдрической паре $f(A)$ найдётся ровно один унарный двугранный угол ϑ , параллельно вложенный в двугранный угол ϑ^* ; (б) у угла ϑ^* имеется столешница $\{\lambda^*; \overline{L^*}\}$, представляющая собой опорную n -грань круглобриллианта $f(D)$; (в) глубина столешницы $\{\lambda^*; \overline{L^*}\}$ угла ϑ^* больше или равна максиглубины угла ϑ .

Доказательство. Первое утверждение доказываемой леммы следует из определения параллельного вложения и первых двух утверждений леммы 7. Второе и третье утверждения данной леммы можно вывести исходя из леммы 69. ■

Напомним: основной целью настоящей работы является обоснование теоремы 10. Для удобства читателя напомним её формулировку.

Теорема 10. Если круглобриллиант D является ε -оптимальным для внешнего каркаса ε -овализованного октаэдрического многогранника F , $\varepsilon > 0$, то существует допустимое вложение D в этот внешний каркас, при котором D вложен в F , причём найти такое вложение можно с помощью алгоритма, изложенного в [3].

Доказательство. Для получения данной теоремы достаточно объединить теоремы 4 и 24 с леммами 89 и 90. ■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Алмазы и бриллианты являются продуктами высочайшей удельной ценности. Цена 1 карата (0,2 г) высококачественного алмаза в 1000 раз выше цены 1 карата золота, а цена хорошего бриллианта массой в 1 карат превосходит ее уже в 5–8 тысяч раз. Естественно встала проблема эффективного использования алмазов. В первую очередь она возникла для производства круглых бриллиантов, доля которых в мировом производстве около 85% и для высококачественных (т.е. наиболее ценных) алмазов.

Высококачественный алмаз имеет форму октаэдрического многогранника. Для таких алмазов вопросы, связанные с их эффективным использованием для получения круглых бриллиантов, были изучены в [3]. К сожалению, доля октаэдрических алмазов среди всех добываемых качественных ювелирных алмазов невелика (около 10%). В связи с этим возникла необходимость в методах, применимых к более широкому кругу алмазов. Естественно, первым делом встал вопрос о возможности расширения области применимости методов, предложенных в [3]. Положительный ответ на этот вопрос дан в настоящей работе. Было показано, что предложенные в [3] методы можно использовать для «овализованных» октаэдрических алмазов, т.е. алмазов, которые можно получить из октаэдрических путём «скругления» (срезания или скалывания) вершин и тех рёбер, инцидентные которым грани, образуют острые двугранные углы. Величина «скругления» может быть достаточно большой – до 20% от радиуса максимального круглого бриллианта, который можно получить из исходного октаэдрического алмаза (т.е. из алмаза, рёбра которого не «скругляются»). Тем самым было показано, что построенные в [3] методы применимы к $\approx 30\%$ добываемых качественных ювелирных алмазов.

Возникает также вопрос: можно ли перенести круг идей, предлагаемых в [3] на ещё более широкий класс ювелирных алмазов. Ответ на этот вопрос пока открыт, хотя есть соображения, говорящие о том, что расширение возможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабат Л.Г., Фридман А.А.* Параллельные вложения многогранников // Дискретная математика. 2008. №2.
2. *Бабат Л.Г.* Исследование стереотипов стоимостной оценки алмазов. М.: ЦЭМИ РАН, 2008.
3. *Бабат Л.Г.* Октаэдрические алмазы и ε -оптимальные круглые бриллианты. М.: ЦЭМИ РАН, 2010.
4. *Бабат Л.Г.* Октаэдрические алмазы: минимальность множества эталонных моделей. М.: ЦЭМИ РАН, 2012.
5. *Епифанов В.И., Песина А.Я., Зыков Л.В.* Технология обработки алмазов в бриллианты. М.: «Высшая школа».
6. *Narendra Karmarkar, Richard M. Karp.* An Efficient Approximation Scheme for the One-Dimensional Bin-Packing Problem. University of California, Berkeley. CA 94720

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Термин.....	стр.
ε -обрезание октаэдрической пары	25
ε -овализованный октаэдрическая пара	26
ε -оптимальный круглобриллиант	25
бинарный двугранный угол октаэдрической пары.....	21
бриллиантовая система координат	41
веретено круглобриллианта.....	57
верхнее основание рундиста.....	14
верхний конус веретена	58
верхний упор тесной модели.....	31–32
внешние векторы тесной модели	31–32
внешний каркас.....	26
внутренний каркас.....	26
глубина столешницы	23
двугранный угол октаэдрической пары.....	21
двугранный угол тесной модели	22
двухупорный двугранный угол тесной модели	34
допустимое вложение	15
допустимое вложение в овализованный многогранник.....	26
калибр круглобриллианта.....	14
компоненты октаэдрического многогранника.....	10
кристаллографическая система координат	30
круглобриллиант.....	13
максиглубина	57
минорно овализованный октаэдрический многогранник	27
направления кристаллографических осей круглобриллианта.....	14
н-грань	11
несобственное полупространство н-грани	11–12
нижнее основание рундиста	14
нижний упор тесной модели	31–32
одноупорный двугранный угол тесной модели.....	34
октаэдрическая пара	9
октаэдрический многогранник	10
опорная н-грань	15
ось круглобриллианта	13
отрицательно коллинеарные векторы	12
паллиативная система координат.....	31
параллельное вложение наборов н-граней.....	16
параллельное вложение октаэдрических пар.....	17
положительно коллинеарные векторы	12
порождающие наборы.....	13
профиль октаэдрической пары.....	18
рундист круглобриллианта.....	13
скооперированные тетраэдры	8
собственное полупространство н-грани.....	11–12
состыкованные пары тетраэдров.....	9
столешница двугранного угла.....	22
тесная модель	17
тетраэдр, индуцированный кубом	6
угол нугации вектора	37
угол нугации тесной модели	40

угол отворота вектора	37
угол отворота тесной модели	40
унарный двугранный угол октаэдрической пары.....	21
центр круглобриллианта	13–14
шип круглобриллианта	13
эквивалентные n-грани	12
эквивалентные наборы n-граней.....	12
эталонная модель.....	65

ОБ АВТОРЕ

Бабат Лев Георгиевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ЦЭМИ РАН.

ИЗДАНИЯ ЦЭМИ РАН

2013 г.

Препринты

1. **Бендиков М.А., Колесник Г.В.** Конкуренция саморегулируемых организаций и эффективность рынков / Препринт # WP/2013/298. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 48 с. (Рус.)
2. **Ершов Д.М., Качалов Р.М.** Системы поддержки принятия решений в процедурах формирования комплексной стратегии предприятия / Препринт # WP/2013/299. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 60 с. (Рус.)
3. **Перминов С.Б., Егорова Е.Н., Вигриянова М.С., Абрамов В.И.** Макроэкономические ориентиры фондовых рынков стран БРИК / Препринт # WP/2013/300. – М.: ФГУН ЦЭМИ РАН, 2013. – 59 с. (Рус.)
4. **Татевосян Г.М., Седова С.В., Писарева О.М., Костромина Г.Г.** Обоснование инвестиционных программ химического комплекса / Препринт # WP/2013/301. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 64 с. (Рус.)
5. **Ушкова В.Л., Ильменская Е.М., Перфиличева Н.А.** Мониторинг научных результатов работников научно-исследовательского учреждения на примере ЦЭМИ РАН / Препринт # WP/2013/302. М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 25 с. (Рус.)
6. **Брагинский О.Б., Татевосян Г.М., Седова С.В., Писарева О.М., Куницына Н.Н.** Методология обоснования инвестиционных программ и их оптимизации при ограниченных финансовых ресурсах (на примере химического комплекса) / Препринт # WP/2013/303. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 81 с. (Рус.)
7. **Детнева Э.В., Терушкин А.Г.** Финансовая обеспеченность потребления и накопления валовым располагаемым доходом. Часть 2. Сектор-анализ / Препринт # WP/2013/304. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 56 с. (Рус.)
8. **Агафонов В.А.** Системные принципы стратегического планирования на региональном уровне / Препринт # WP/2013/305. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 73 с. (Рус.)
9. **Летенко А.В., Ставчиков А.И.** Современные проблемы модернизации российской экономики / Препринт # WP/2013/306. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 33 с. (Рус.)

Книги

1. **Стратегическое планирование и развитие предприятий** / Сборник пленарных докладов и материалов круглого стола Тринадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 10–11 апреля 2012 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 94 с.
2. **Стратегическое планирование и развитие предприятий**. В 5 т. / Материалы Четырнадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 9–10 апреля 2013 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 992 с.
3. **Модели и методы инновационной экономики** / Сборник научных трудов под ред. К.А. Багриновского и Е.Ю. Хрусталёва. Вып. 5. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 147 с. (Рус.)
4. **Теория и практика институциональных преобразований в России** / Сборник научных трудов под ред. Б.А. Ерзнкяна. Вып. 26. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 174 с. (Рус., англ.)
5. **Теория и практика институциональных преобразований в России** / Сборник научных трудов под ред. Б.А. Ерзнкяна. Вып. 27. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 178 с. (Рус., англ.)
6. **Анализ и моделирование экономических процессов** / Сборник статей под ред. **В.З. Беленького**, Н.А. Трофимовой. Вып. 10. – М.: ЦЭМИ РАН, 2013. – 155 с. (Рус.)

ИЗДАНИЯ ЦЭМИ РАН

2014 г.

Препринты

1. **Бабат Л.Г.** Овалированные алмазы и ε -оптимальные круглые бриллианты / Препринт # WP/2014/307. – М.: ЦЭМИ РАН, 2014. – 77 с. (Рус.)

Книги

1. **Стратегическое планирование и развитие предприятий.** В 5 т. / Материалы Пятнадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 15–16 апреля 2014 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. – М.: ЦЭМИ РАН, 2014. – 998 с.

2. **Стратегическое планирование и развитие предприятий** / Сборник пленарных докладов и материалов круглого стола Тринадцатого всероссийского симпозиума. Москва, 9–10 апреля 2013 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. – М.: ЦЭМИ РАН, 2014. – 90 с.

2013

Working papers

1. **Bendikov M.A., Kolesnik G.V.** Self-Regulatory Organizations Competition and Markets' Efficiency / Working paper # WP/2013/298. – Moscow: CEMI Russian Academy of Science, 2013. – 48 p. (Rus.)
2. **Ershov D.M., Kachalov R.M.** Decision Support Systems within the Procedures of Complex Strategy Building / Working paper # WP/2013/299. – Moscow: CEMI Russian Academy of Science, 2013. – 60 p. (Rus.)
3. **Perminov S.B., Egorova E.N., Vigrianova M.S., Abramov V.I.** Macroeconomic Targets Stock Markets of the BRIC Countries / Working paper # WP/2013/300. – Moscow, CEMI Russian Academy of Science, 2013. – 59 p. (Rus.)
4. **Tatevosian G.M., Sedova S.V., Pisareva O.M., Kostromina G.G.** Investment Programs of a Chemical Complex Substantiation / Working paper # WP/2013/301. – Moscow, CEMI Russian Academy of Science, 2013. – 64 p. (Rus.)
5. **Ushkova V.L., Ilmenskaya E.M., Perfilicheva N.A.** Monitoring Scientific Results of the Research Workers of the Scientific Enterprise on an Example of CEMI RAS / Working Paper # WP/2013/302. Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2013. – 25 p. (Rus.)
6. **Braginsky O.B., Tatevosian G.M., Sedova S.V., Pisareva O.M., Kunitsyna N.N.** Methodology Study of Investment Programs and Their Optimization with Limited Financial Resources (for example, the chemical industry) / Working Paper # WP/2013/303. – M.: CEMI RAS, 2013. – 81 p. (Rus.)
7. **Detneva E.V., Terushkin A.G.** Financial Provision of Consumption and Accumulation by the Gross Disposable Income. Part 2. Sector-analysis / Working Paper # WP/2013/304. – Moscow, CEMI RAS, 2013. – 56 p. (Rus.)
8. **Agafonov V.A.** System Principles of Strategic Planning at a Regional Level / Working paper # WP/2013/305. – Moscow, CEMI RAS, 2013. – 73 p. (Rus.)
9. **Letenko A.V., Stavtchikov A.I.** Contemporary Problems of Russian Economy Modernization / Working paper # WP/2013/306. – Moscow, CEMI RAS, 2013. – 33 p. (Rus.)

Books

1. **Strategic Planning and Evolution of Enterprises** / Materials. Thirteenth Russian Symposium. Moscow, April 10–11, 2012. Ed. by G.B. Kleiner. – Moscow, CEMI RAS, 2013. – 94 p.
2. **Strategic Planning and Evolution of Enterprises. 5 issues** / Materials. Fourteenth Russian Symposium. Moscow, April 9–10, 2013. Ed. by G.B. Kleiner. – Moscow, CEMI RAS, 2013. – 996 p.
3. **Models and Methods of Innovation Economy** / Collection of scientific works ed. K.A. Bagreenovsky, E.Yu. Khrustalyov. Issue 5. – Moscow, CEMI RAS, 2013. – 147 p. (Eng.)
4. **Theory and Practice of Institutional Reforms in Russia** / Collection of scientific works ed. by B.H. Yerznkyan. Issue 26. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2013. – 174 p. (Rus., Eng.)
5. **Theory and Practice of Institutional Reforms in Russia** / Collection of scientific works ed. by B.H. Yerznkyan. Issue 27. – Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2013. – 178 p. (Rus., Eng.)
6. **Analysis and Modeling of Economic Processes** / The Collection of Articles, ed. V.Z. Belenky, N.A. Trofimova. Issue 10. – Moscow: CEMI RAS, 2013. – 155 p. (Rus.)

Central Economics and Mathematics Institute Russian Academy of Sciences
Publications

2014

Working papers

1. **Babat L.G.** Rounded Raw Diamonds and ε -optimal Round Polished Diamonds / Working paper # WP/2014/307. – Moscow, CEMI RAS, 2014. – 77 p. (Rus.)

Books

1. **Strategic Planning and Evolution of Enterprises.** 5 issues / Materials. Fifteenth Russian Symposium. Moscow, April 15–16, 2014. Ed. by G.B. Kleiner. – Moscow, CEMI RAS, 2014. – 197 p.

2. **Strategic Planning and Evolution of Enterprises** / Materials. Fourteenth Russian Symposium. Moscow, April 9–10, 2013. Ed. by G.B. Kleiner. – Moscow, CEMI RAS, 2014. – 90 p.