На правах рукописи

Балаев Алексей Иванович

СОСТАВЛЕНИЕ ПОРТФЕЛЕЙ ЦЕННЫХ БУМАГ НА ОСНОВЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОВМЕСТНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДНОСТЕЙ

Специальность: 08.00.13

«Математические и инструментальные методы экономики»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».

Научный руководитель:	Шведов Алексей Сергеевич доктор физико-математических наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой математической экономики и эконометрики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ «ВШЭ»)
Официальные оппоненты:	Попов Виктор Юрьевич доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» Финансового Университета при Правительстве Российской Федерации (Финансовый университет)
	Турунцева Марина Юрьевна кандидат экономических наук, заведующая лабораторией макроэкономического прогнозирования Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (РАНХиГС)
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук (ВЦ РАН)

Защита состоится «17» ноября 2014 г. в 12.00 на заседании Диссертационного совета Д 002.013.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Центральном экономико-математическом институте Российской академии наук по адресу: 117418?, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 47, ауд. 520.

Сведения о защите и автореферат размещены на сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации http://vak.ed.gov.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЦЭМИ РАН и на сайте ЦЭМИ РАН http://cemi.rssi.ru.

Автореферат разослан «   » октября 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.013.02,
кандидат физико-математических наук С.В. Борисова

I. Общая характеристика работы

<u>Актуальность темы.</u> Составление оптимального портфеля ценных бумаг является важной практической задачей на фондовом рынке. Эта задача всегда сохраняет свою актуальность, поскольку стремление оптимально распределить капитал среди доступных активов является естественным для рационального инвестора.[1] Для решения портфельных задач инвестору необходимо знать совместное распределение доходностей активов, условное на всей доступной информации. Однако на практике инвестор таким знанием не обладает, и ему необходимо оценить это условное распределение. Поэтому прогнозирование совместного распределения доходностей активов также является актуальной практической задачей для участников финансовых рынков.

Применению эконометрических методов для составления портфелей активов посвящено достаточно много литературы. Обзор эконометрических моделей применительно к составлению финансовых портфелей приведен, например, в книге [Scherer, 2002][2]. Байесовские методы прогнозирования распределений доходностей применительно к задаче портфельного выбора рассматриваются в работах [Winkler, 1973][3], [Polson, Tew, 2000][4] и [Gohout, Specht, 2007][5]. Составление портфелей с помощью байесовского подхода на основе методов Монте-Карло с цепями Маркова рассмотрено в работе [Greyserman et al., 2006][6]. Работы [Young, Lenk, 1998][7] и [Aguilar, West, 2000][8] посвящены составлению портфелей с помощью факторных моделей.

---

[1] См. Богл, Д. *Руководство разумного инвестора. Надежный способ получения прибыли на фондовом рынке*: Пер. с англ. – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2013; Грэхем, Б., Цвейг, Д. *Разумный инвестор*: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2007.

[2] Scherer, B. *Portfolio Construction and Risk Budgeting*. London: Risk Books, 2002.

[3] Winkler, R.L. Bayesian Models for Forecasting Future Security Prices // *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 1973. Vol. 8 (3). PP. 387-405.

[4] Polson, N.G., Tew, B.V. Bayesian Portfolio Selection: An Empirical Analysis of the S&P 500 Index 1970-1996 // *Journal of Business & Economic Statistics*. 2000. Vol. 18 (2). PP. 164-173.

[5] Gohout, W., Specht, K. Mean-variance portfolios using Bayesian vector-autoregressive forecasts // *Statistical Papers*. 2007. Vol. 48 (3). PP. 403-418.

[6] Greyserman, A., Jones, D., Strawderman, W. Portfolio selection using hierarchical Bayesian analysis and MCMC methods // *Journal of Banking and Finance*. 2006. Vol. 30. PP. 669-678.

При составлении портфелей с помощью эконометрических моделей значительную роль играет выбор многомерного распределения доходностей, лежащего в основе модели. Одним из наиболее популярных распределений, применяемых для составления портфелей, является классическое многомерное *t*-распределение (см. [Kotz, Nadarajah, 2004; 2008][9] и [Ku, 2008][10]), которое приспособлено для учета тяжелых хвостов (см. [Fiorentini et al., 2003][11]). Данным свойством обладают также многомерные распределения, предложенные в работах [Samorodinsky, Taqqu, 1994][12], [Fernandez et al., 1995][13], [Mauleon, Perote, 1999][14], [Branco, Dey, 2001][15] и [Dreze, 1978][16]. Большое внимание уделяется также учету асимметрии многомерных распределений доходностей (см., например, [Vlaar, Palm, 1993][17], [Jones, 2001; 2002][18], [Ferreira, Steel, 2003][19], [Bauwens, Laurent, 2005][20]).

---

[7] Young, M.R., Lenk, P.J. Hierarchical Bayes Methods for Multifactor Model Estimation and Portfolio Selection // *Management Science*. 1998. Vol. 44 (11). PP. S111-S124.

[8] Aguilar, O., West, M. Bayesian Dynamic Factor Models and Portfolio Allocation // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2000. Vol. 18 (3). PP. 338-357.

[9] Kotz, S., Nadarajah, S. *Multivariate t Distributions and Their Applications*. Cambridge University Press, 2004; Kotz, S., Nadarajah, S. Estimation Methods for the Multivariate t Distribution // *Acta Applicandae Mathematicae*. 2008. Vol. 102 (1). PP. 99-118.

[10] Ku, Y-H.H. Student-*t* distribution based VAR-MGARCH: an application of the DCC model on international portfolio risk management // *Applied Economics*. 2008. Vol. 40 (13). PP. 1685-1697.

[11] Fiorentini, G., Sentana, E., Calzolari, G. Maximum likelihood estimation and inference in multivariate conditionally heteroscedastic dynamic regression models with Student t innovations // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2003. Vol. 21. PP. 532-546.

[12] Samorodinsky, G., Taqqu, M. *Stable non-Gaussian random processes: Stochastic models with infinite variance*. London: Chapman and Hall, 1994.

[13] Fernandez, C., Osiewalski, J., Steel, M. Modeling and inference with v-spherical distributions // *Journal of the American Statistical Association*. 1995. Vol. 90. PP. 1331-1340.

[14] Mauleon, I., Perote, J. *Estimation of multivariate densities with financial data: the performance of the multivariate Edgeworth-Sargan density*. Proceedings of the 12th Australian Finance and Banking Conference, Sidney, 1999.

[15] Branco, M., Dey, D. A class of multivariate skew-elliptical distributions // *Journal of Multivariate Analysis*. 2001. Vol. 79. PP. 99-113.

[16] Dreze, J.H. Bayesian regression analysis using poly-*t* densities // *Journal of Econometrics*. 1978. Vol. 6. PP. 329-354.

[17] Vlaar, P.J.G., Palm, F.C. The message in weekly exchange rates in the european monetary system: Mean reversion, conditional heteroscedasticity and jumps // *Journal of Business and Economic Statistics*. 1993. Vol. 11 (3). PP. 351-360.

[18] Jones, M.C. Multivariate T and Beta distributions associated with the multivariate F distribution // *Metrika*. 2001. Vol. 54. PP. 215-231; Jones, M.C. Marginal replacement in multivariate densities,

Скалярный параметр степеней свободы классического многомерного *t*-распределения предполагает одинаковый эксцесс распределения доходностей всех активов, однако на практике эти эксцессы могут существенно различаться.

По этой причине классическое многомерное *t*-распределение является недостаточно гибким для практического применения, что породило его модификацию – многомерное *t*-распределение с вектором степеней свободы, предложенное в работе [Шведов, 2009][21], которое позволяет учесть больше информации при моделировании, чем классическое многомерное *t*-распределение, за счет возможности различия эксцессов. Многомерное *t*-распределение с вектором степеней свободы еще недостаточно изучено, и рассмотрение его теоретических и эмпирических свойств является актуальной задачей как с точки зрения теории многомерных вероятностных распределений, так и с позиции моделирования доходностей и составления портфелей. Данная задача частично решена в диссертации: во-первых, рассмотрено применение многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы к прогнозированию доходностей фондовых индексов и составлению портфелей акций, и во-вторых, исследованы его моменты, маргинальные функции плотности и характеристические функции, предложен алгоритм симулирования, рассмотрена возможная модификация и построена копула.

Основные цели работы. Основной целью диссертации являлось практическое применение многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы к прогнозированию распределений доходностей и составлению портфелей, а также его сравнение с некоторыми другими известными

---

with application to skewing spherically symmetric distributions // *Journal of Multivariate Analysis*. 2002. Vol. 81. PP. 85-99.

[19] Ferreira, J.T.A.S., Steel, M.F.J. *Bayesian multivariate regression analysis with a new class of skewed distributions*. Statistics Research Report, 419, University of Warwick, 2003.

[20] Bauwens, L., Laurent, S. A new class of multivariate skew densities, with application to generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2005. Vol. 20. PP. 339-350.

[21] Шведов, А.С. Бета-распределение случайной матрицы и его применение в модели состояние-наблюдение / *Препринт* WP2/2009/01. М.: Изд. дом НИУ ВШЭ, 2009.

распределениями. Были также поставлены цели построения асимметричной модификации многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы и вывод копулы на его основе. К другим целям относились вывод теоретических свойств данного распределения и получение алгоритма его симулирования. Достижение данных целей потребовало решения следующих **задач**:

1. Эмпирическое сравнение свойств многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы с другими гибкими параметризациями в задаче прогнозирования условного распределения доходностей фондовых индексов.
2. Сравнение эмпирических свойств оптимальных портфелей акций, составленных с помощью модели на основе многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы и моделей на основе других распределений.

Кроме того, для данного распределения решены следующие **задачи**:

3. Вывод общей формулы и условий существования смешанного момента.
4. Разработка методики построения многомерных GARCH моделей.
5. Вывод маргинальных функций плотности и характеристических функций (для стандартизованного распределения).
6. Построение копулы (для стандартизованного распределения).
7. Построение асимметричной модификации.
8. Получение алгоритма симулирования.

Научная новизна исследования состоит в первом опыте эмпирического применения многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы при моделировании финансовых доходностей и составлении портфелей, а также в выводе теоретических свойств данного распределения.

Использование классического многомерного *t*-распределения достаточно популярно в финансовой эконометрике,[22] поскольку оно дает хорошие результаты при моделировании условного распределения доходностей и

[22] См. Fiorentini, G., Sentana, E., Calzolari, G. Maximum likelihood estimation and inference in multivariate conditionally heteroscedastic dynamic regression models with Student *t* innovations // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2003. Vol. 21. PP. 532-546.

составлении финансовых портфелей.[23] С точки зрения моделирования финансовых доходностей рассматриваемое в диссертации *t*-распределение с вектором степеней свободы является более продвинутым по сравнению с классическим *t*-распределением. Во-первых, вектор степеней свободы позволяет моделировать для каждого маргинального распределения доходностей свой индивидуальный эксцесс, что дает возможность учесть больше информации о каждом активе. Во-вторых, наличие дополнительных параметров степеней свободы делает более гибким моделирование различий в хвостовых зависимостях между разными парами доходностей. В настоящей диссертации многомерное *t*-распределение с вектором степеней свободы впервые применено для моделирования динамики финансовых доходностей и составления портфелей.

Теоретические свойства классического многомерного *t*-распределения хорошо изучены.[24] В то же время многомерное *t*-распределение с вектором степеней свободы предложено недавно, и его теория еще недостаточно развита. Диссертация содержит развитие теории многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы. Выведены формула смешанного момента общего вида с условиями существования, формулы одномерных маргинальных функций плотности и характеристических функций, получена методика построения произвольной многомерной GARCH модели, предложен алгоритм симулирования, асимметричная модификация[25] и построена копула.

Все результаты работы получены автором лично и являются новыми с учетом одного замечания. Лемма 10 главы 3 могла быть доказана ранее, однако

---

[23] См. Ku, Y-H.H. Student-*t* distribution based VAR-MGARCH: an application of the DCC model on international portfolio risk management // *Applied Economics*. 2008. Vol. 40 (13). PP. 1685-1697.

[24] См., например, Kotz, S., Nadarajah, S. *Multivariate t Distributions and Their Applications*. Cambridge University Press, 2004; Kotz, S., Nadarajah, S. Estimation Methods for the Multivariate t Distribution // *Acta Applicandae Mathematicae*. 2008. Vol. 102 (1). PP. 99-118.

[25] Для случая скаляра степеней свободы подобная модификация предложена в [Bauwens, Laurent, 2005].

обнаружить опубликованное ее доказательство автору не удалось, и поэтому в диссертации приведен авторский вариант ее доказательства.

Методы исследования. В работе использовались методы эконометрики, анализа временных рядов, портфельной теории, теории специальных функций, а также теории вероятностей и математической статистики.

Теоретическая и практическая значимость результатов исследования. ***Теоретическая значимость*** результатов работы состоит в том, что с помощью выведенных свойств многомерного t-распределения с вектором степеней свободы и объектов на его основе развиваются существующие эконометрические модели и строятся новые.

Формула смешанного момента с условиями существования для стандартизованного многомерного t-распределения с вектором степеней свободы имеет достаточно простую аналитическую запись, а соответствующая формула для нестандартизованного распределения может легко быть реализована на компьютере. Формула смешанного момента для многомерного t-распределения с вектором степеней свободы содержит важную информацию о структуре зависимости между компонентами случайного вектора с этим распределением. Данная формула дает возможность построения многомерных GARCH моделей на основе t-распределения с вектором степеней свободы.

Маргинальные функции плотности и характеристические функции для стандартизованного многомерного t-распределения с вектором степеней свободы представляют интерес, поскольку описывают класс распределений с тяжелыми хвостами, форма которых зависит от произвольного числа параметров (обычное t-распределение является простейшим представителем этого класса). По-видимому, полученный класс распределений является новым (автору не удалось найти его в литературе), однако из осторожности в число новых результатов диссертации это не включается. Теоретическая значимость данного класса распределений заключается в том, что одномерные GARCH модели на его основе не могут давать более слабые результаты при моделировании волатильности, чем популярная GARCH модель на основе обычного t-распределения. Выведенные маргинальные функции плотности важны также, поскольку позволяют построить копулу на основе многомерного t-распределения с вектором степеней свободы. Данная копула дает возможность более гибко моделировать различия хвостовых зависимостей между компонентами случайного вектора, чем классическая t-копула, за счет наличия отдельного параметра степеней свободы у каждого компонента.

Предложенный алгоритм симулирования многомерного t-распределения с вектором степеней свободы основан на выражении данного распределения через матрицу и вектор с известными распределениями, симулирование которых не представляет проблемы. Таким образом, данный алгоритм является «прямым» и не связан с применением методов Монте-Карло с цепями Маркова, в чем заключается его теоретическая ценность.

Наконец, теоретическая значимость построенной асимметричной модификации многомерного t-распределения с вектором степеней свободы заключается в том, что в данной модификации параметры, контролирующие меры асимметрии и эксцесса маргинальных распределений, являются векторными. Соответственно, предложенное модифицированное распределение является более гибким, чем варианты классического многомерного скошенного t-распределения.

Теоретические факты о многомерном t-распределении с вектором степеней свободы, полученные в работе, позволяют использовать данное распределение во многих приложениях, в первую очередь для моделирования финансовых доходностей, и в этом заключается ***практическая значимость*** данной работы.

Формула ковариационной матрицы многомерного t-распределения с вектором степеней свободы позволяет строить многомерные GARCH модели на его основе. В работе это продемонстрировано для моделей BEKK на данных о доходностях фондовых индексов и моделей DCC-GARCH на данных о доходностях акций российских компаний.

На основе выведенных одномерных маргинальных функций плотности можно построить GARCH модели для доходностей с качеством соответствия данным не меньшим, чем в популярной GARCH модели с t-распределением.

Стандартизованная t-копула и стандартизованное асимметричное t-распределение с вектором степеней свободы могут применяться для моделирования центрированных и нормированных шоков финансовых доходностей. Преимущество t-копулы с вектором степеней свободы по сравнению с классической t-копулой заключается в большей гибкости при учете различий хвостовых зависимостей. Преимуществом многомерного асимметричного t-распределения с вектором степеней свободы по сравнению с классическим многомерным асиммметричным t-распределением является его способность учитывать различия эксцессов маргинальных распределений.

В главах 1 и 2 проведено сравнение модели для финансовых доходностей на основе многомерного t-распределения с вектором степеней свободы с моделями на основе других известных многомерных распределений. Получены следующие результаты, полезные в финансовых приложениях.

Во-первых, при моделировании финансовых доходностей многомерное t-распределение может давать более высокие результаты, чем обобщенное распределение ошибки и распределение Грама – Шарлье, причем векторный параметр степеней свободы может быть предпочтительнее скалярного.

Во-вторых, при составлении портфелей многомерное t-распределение может не давать дополнительной выгоды по сравнению с многомерным нормальным распределением при минимизации дисперсии доходности портфеля без ограничений. Многомерное нормальное распределение может обеспечивать низкую фактическую волатильность, а многомерное t-распределение с вектором степеней свободы – высокую фактическую среднюю доходность при минимизации дисперсии портфеля с заданной ожидаемой доходностью. Многомерное нормальное распределение может обеспечивать высокую фактическую среднюю доходность, а многомерное t-распределение с вектором степеней свободы – низкую фактическую волатильность при максимизации ожидаемой доходности портфеля с заданной дисперсией.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертации были апробированы на следующих конференциях и научных семинарах:

1. Совместный научный семинар кафедры математической экономики и эконометрики и лаборатории макроструктурного моделирования экономики России. НИУ ВШЭ, Москва, 10 июля 2012 г.
2. IV Международная научно-практическая конференция студентов и аспирантов «Статистические методы анализа экономики и общества». НИУ ВШЭ, Москва, 16 мая 2013 г.
3. Семинар «Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов». ЦЭМИ РАН, Москва, 22 мая 2013 г.
4. Научно-практическая конференция «Эконометрические методы в исследовании глобальных экономических процессов», совместный доклад с Шведовым А.С. МГИМО, Москва, 29 октября 2013 г.
5. Семинар исследовательского проекта Российской Экономической Школы «Econometrics of many financial assets», РЭШ, 7 февраля 2014 г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 7 работах общим объемом 8,7 п.л. Три из них опубликованы в российских рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК Министерства образования науки РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложений к главам 1 и 2. Общий объем работы – 307 страниц, из них 160 страниц текста, включая 25 таблиц и 12 рисунков, и приложения на 135 страницах. Список использованной литературы содержит 115 наименований на 12 страницах.

II. Основные положения диссертации

Во ***введении*** обосновываются актуальность, цели и структура диссертации по выбору эконометрических моделей для многомерных финансовых временных рядов, составлению портфелей с помощью таких моделей и развитию теории многомерного t-распределения с вектором степеней свободы.

В ***первой главе*** проведено сравнение новой вероятностной модели для доходностей мировых фондовых индексов на основе многомерного t-распределения с вектором степеней свободы с моделями на основе классического многомерного t-распределения, обобщенного распределения ошибки и распределения Грама – Шарлье.

Использованы дневные логарифмические доходности фондовых индексов S&P 500, FTSE 100, CAC 40, DAX, Hang Seng и Nikkei 225 с ноября 1990 г. по октябрь 2012 г. Первые 3261 наблюдение задействованы при оценивании моделей, а последние 1630 – при проверке их предсказательной способности.

Для вектора доходностей построены четыре модели: модели с t-распределениями с вектором и скаляром степеней свободы, с обобщенным распределением ошибки[26] и распределением Грама – Шарлье[27].

Вектор условных ожиданий задан как $\mu_t = c + Qr_{t-1}$, где r_t – d-мерный вектор доходностей, а c и Q – d-мерный вектор и $d \times d$ матрица соответственно. Динамика $H_t = V_{t-1}(r_t)$ описывается моделью BEKK(1,1)[28]:

$$H_t = \Omega\Omega' + A\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}A' + BH_{t-1}B',$$

где Ω – $d \times d$ нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами, A и B – $d \times d$ матрицы и $\varepsilon_t = r_t - \mu_t$ – вектор шоков.

Функция плотности распределения вектора доходностей имеет вид ($d = 2$):

$$f_{t-1}(r_t) = (2\pi)^{-1} \frac{\Gamma\left(\nu_1 + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\nu_1)\Gamma\left(\nu_2 - \frac{1}{2}\right)} |A_t|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}(r_t - \mu_t)' A_t^{-1} (r_t - \mu_t)\right)^{-\nu_1 - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{(r_{t1} - \mu_{t1})^2}{A_{t11}}\right)^{\nu_1 - \nu_2}.$$

[26] Giller, G.A generalized error distribution / *Giller Investments Research Note* 20031222/1, 2005.
[27] Del Brio, E., Niguez, T., Perote, J. Multivariate Gram-Charlier densities / *Working paper*, 2008.
[28] Engle, R., Kroner, K. Multivariate simultaneous generalized ARCH // *Econometric Theory*. 1995. Vol. 11. PP. 122-150.

Она соответствует двумерному *t*-распределению с параметрами $\mu_t \in \mathbb{R}^2$, положительно определенной 2×2 матрицей A_t и вектором степеней свободы $(\nu_1, \nu_2)'$ с $\nu_1 > 0, \nu_2 > 1/2$ (скаляр степеней свободы соответствует $\nu_1 = \nu_2 = \nu$).

В работе показано, что при $\nu_j > \frac{j+1}{2},\ j = 1,\dots,d$ имеем $A_t = P_t P_t'$ с

$$P_t = U_t\, diag\left\{ \sqrt{\frac{2a_{d-j+1} - d + j - 1}{2} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{2a_{d-i} - d + i - 1}{2a_{d-i} - d + i}},\ j = 1,\dots,d \right\}, \qquad (1)$$

где U_t – нижняя треугольная матрица с положительной диагональю, такая что $H_t = U_t U_t'$ (разложение Холецкого). Формула (1) позволяет перейти от H_t к A_t.

Из 6 временных рядов доходностей фондовых индексов составлены 15 пар, и для каждой пары с помощью теста на основе информационного критерия Кульбака – Лейблера[29] проведено сравнение четырех упомянутых моделей.

В результате сравнения в 8 из 15 случаев многомерное *t*-распределение с вектором степеней свободы дает более высокое качество подгонки к данным и предсказательную способность вне выборки по сравнению с классическим *t*-распределением. Обобщенное распределение ошибки и распределение Грама – Шарлье на рассмотренных рядах показывают более слабые результаты.

Во ***второй главе*** построены 10-мерные VAR-MGRACH модели доходностей акций российских компаний на основе *t*-распределений с вектором и скаляром степеней свободы, а также нормального распределения. С помощью моделей составлены портфели различных типов и проведено их сравнение.

Использованы дневные логарифмические доходности по 14 наиболее ликвидным акциям, котировавшимся на Московской Бирже с июля 2008 г. по февраль 2013 г. Сформированы 16 наборов акций, упорядоченных по убыванию ликвидности.

[29] Тест рассмотрен в Vuong, Q. Likelihood ratio tests for model selection and non-nested hypotheses // *Econometrica*. 1989. Vol. 57. PP. 307-333.

Как и в главе 1, вектор условных ожиданий задан как $\mu_t = c + Q r_{t-1}$ (но $d = 10$). Для матрицы $H_t = V_{t-1}(r_t)$ используется DCC-GARCH(1,1) модель[30]:

$$H_t = D_t R_t D_t, \qquad Q_t = (1-a-b)S + a\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1} + bQ_{t-1},$$

где D_t – диагональная матрица условных стандартных отклонений вида GARCH(1,1), R_t – уловная корреляционная матрица (нормированная Q_t), S – матрица безусловных корреляций ε_t и $a > 0$, $b > 0$, $a + b < 1$.

Модель вектора доходностей акций на основе многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы имеет вид

$$f_{t-1}(r_t) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(\kappa)}{\Gamma_d^*(\nu)} |A_t|^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2}(r_t - \mu_t)^{[d-j]\prime} \left(A_t^{[d-j]}\right)^{-1} (r_t - \mu_t)^{[d-j]}\right)^{\kappa_j - \kappa_{j+1}},$$

где для вектора степеней свободы $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d)'$ и вектора $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_d)'$ имеем

$$\nu_j > \frac{j-1}{2}, \; \kappa_j = \nu_j + \frac{1}{2}, \; j = 1, \ldots, d, \; \nu_0 = \kappa_0 = 0, \; \nu_{d+1} = \kappa_{d+1} = \frac{d+1}{2},$$

A_t – положительно определенная $d \times d$ матрица, $\Gamma_d^*(\nu) = \pi^{\frac{d(d-1)}{4}} \prod_{j=1}^{d} \Gamma\left(\nu_j - \frac{j-1}{2}\right)$, $(r_t - \mu_t)^{[d-j]}$ – вектор из первых $[d-j]$ компонент $r_t - \mu_t$, а $A_t^{[d-j]}$ – матрица из первых $[d-j]$ строк и столбцов A_t. Переход от H_t к A_t дает формула (1).

Для каждого из 16 наборов акций на первых 760 наблюдениях были оценены 10-мерные модели VAR(1)-DCC-GARCH(1,1) с *t*-распределениями с вектором и скаляром степеней свободы, а также с нормальным распределением.

С помощью моделей составлены классические портфели.[31] По полученным 48 моделям построены прогнозы μ_t и H_t на последние 379 наблюдений и определены доли акций в портфелях трех типов: безусловный минимум дисперсии (AMV), минимум дисперсии при ожидании не ниже $\bar{r}$ (CMV), максимум ожидания при дисперсии не выше $\bar{v}$ (CME).

[30] Engle, R.F. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2002. Vol. 20. PP. 339-350.

[31] Основы подхода заложены в книгах Markowitz, H.M. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. N.Y.: Wiley, 1959; Sharpe, W.F. *Portfolio theory and capital markets*. N.Y.: McGraw-Hill, 1970.

Для $\bar{r} = 0{,}5$ и $\bar{v} = 50$ получены следующие результаты. Для AMV портфелей ни одно из рассмотренных распределений не может считаться предпочтительным, поскольку динамика стоимости этих портфелей для построенных моделей оказалось достаточно близкой. Для CMV портфелей наилучшие результаты дают нормальное распределение и *t*-распределение с вектором степеней свободы. Нормальное распределение обеспечивает минимальную фактическую волатильность, а *t*-распределение с вектором степеней свободы – максимальную фактическую среднюю доходность для наиболее ликвидных CMV портфелей. Для CME портфелей лидируют также нормальное распределение и *t*-распределение с вектором степеней свободы. Максимум фактической средней доходности для CME портфелей обеспечивает нормальное распределение, а минимум фактической волатильности для большинства таких портфелей – *t*-распределение с вектором степеней свободы.

В ***третьей главе*** выведены общая формула и условия существования моментов многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы, его одномерные маргинальные функции плотности и характеристические функций, а также предложен алгоритм симулирования данного распределения.

Для матрицы $M = \{m_{ij}\},\ 1 \le i, j \le d$ и $k = 1,\dots,d$ обозначим подматрицы $M^{[k]} = \{m_{ij}\},\ 1 \le i, j \le k$ и $M_{[k]} = \{m_{ij}\},\ d-k+1 \le i, j \le d$. Пусть $\mu \in \mathbb{R}^d$ и A – положительно определенная $d \times d$ матрица. Для $a = (a_1,\dots,a_d)'$ и $b = (b_1,\dots,b_d)'$ предполагаем $a_j > \frac{j-1}{2},\ j = 1,\dots,d$, $a_0 = 0$, $a_{d+1} = \frac{d+1}{2}$, $b_j = a_j + \frac{1}{2},\ j = 1,\dots,d$, $b_0 = 0$, $b_{d+1} = \frac{d+1}{2}$. Пусть также $\Gamma_d^*(a) = \pi^{\frac{d(d-1)}{4}} \prod_{j=1}^{d} \Gamma\left(a_j - \frac{j-1}{2}\right)$.

Определение 1. Случайный вектор $X \in \mathbb{R}^d$ имеет многомерное *t*-распределение с вектором степеней свободы с параметрами μ, a, A, если его функция плотности имеет вид

$$f_X(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} |A|^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2}(x-\mu)^{[d-j]\prime} \left(A^{[d-j]}\right)^{-1} (x-\mu)^{[d-j]}\right)^{b_j - b_{j+1}}. \qquad (2)$$

Положим $Z = P^{-1}(X-\mu)$, где P – нижняя треугольная $d \times d$ матрица, такая что $A = PP'$. Вектор $Z = (Z_1,...,Z_d)'$ имеет *t*-распределение с вектором степеней свободы с $\mu = 0$ и $A = I_d$, то есть функцию плотности[32]:

$$f_Z(z) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2}z_1^2 + ... + \frac{1}{2}z_{d-j}^2\right)^{b_j - b_{j+1}}. \qquad (3)$$

Теорема 1. Пусть Z имеет функцию плотности распределения (3), $r_j \in \{0,1,2...\}$ и $b_j > \frac{j}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j} r_{d+i-j}$ для $j = 1,...,d$. Тогда смешанный момент $E(Z_1^{r_1}...Z_d^{r_d})$ существует. При этом если r_j нечетно для некоторого j, то $E(Z_1^{r_1}...Z_d^{r_d}) = 0$. Если r_j четно для всех $j = 1,...,d$., то

$$E(Z_1^{r_1}...Z_d^{r_d}) = 2^{s_d} \pi^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} \prod_{j=1}^{d} \mathrm{B}\left(b_j - \frac{j}{2} - s_j, \frac{r_{d-j+1}+1}{2}\right).$$

Если же $r_j \le -1$ или $b_j \le \frac{j}{2} + s_j$ для некоторого j, то $E(Z_1^{r_1}...Z_d^{r_d})$ не существует.

Согласно Теореме 1, $E(Z)$ существует только при $a_j > \frac{j}{2},\ j = 1,...,d$ и $E(Z) = 0$, а $V(Z)$ существует только при $a_j > \frac{j+1}{2},\ j = 1,...,d$ и

$$V(Z) = diag\left\{\frac{2}{2a_{d-j+1} - d + j - 1} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{2a_{d-i} - d + i}{2a_{d-i} - d + i - 1},\ j = 1,...,d\right\}.$$

Центральный смешанный момент вектора X выражается через моменты вектора Z из Теоремы 1 с использованием $X = \mu + PZ$.

В доказательствах Теорем 2 и 3 использованы свойства обобщенных гипергеометрических функций и G-функции Мейера.[33]

Теорема 2. Пусть Z имеет функцию плотности распределения (3). Тогда функция плотности распределения компоненты Z_j имеет вид

---

[32] Показано в Шведов, А.С. *t*-распределение случайной матрицы и его применение в регрессионной модели / *Препринт* WP2/2010/01. М.: Изд. дом НИУ ВШЭ, 2010.

[33] См. Градштейн, И.С., Рыжик, И.М. *Таблицы интегралов, рядов и произведений*. 7-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011; Прудников, А.П., Брычков, Ю.А., Маричев, О.И. *Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы*. 2-е изд. М.: Физматлит, 2003.

$$f_{Z_j}(z_j) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}\right)}{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j}{2}\right)} \prod_{k=d-j+2}^{d} \frac{\Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)^2}{\Gamma\left(a_k - \frac{k-3}{2}\right)\Gamma\left(a_k - \frac{k-1}{2}\right)} \times$$

$$\times {}_jF_{j-1}\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}, ..., a_d - \frac{d-2}{2}; a_{d-j+2} - \frac{d-j-1}{2}, ..., a_d - \frac{d-3}{2}; -\frac{z_j^2}{2}\right), \quad (4)$$

где ${}_pF_q(m_1,...,m_p;n_1,...,n_q;x)$ – обобщенная гипергеометрическая функция порядка (p,q).

Теорема 3. Пусть Z имеет функцию плотности распределения (3). Тогда характеристическая функция распределения компоненты Z_j имеет вид

$$\varphi_{Z_j}(t) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{\prod_{k=d-j+2}^{d} \Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^{d} \Gamma\left(a_k - \frac{k-1}{2}\right)} \frac{1}{|t|} G_{j+1,j-1}^{0,j+1}\left(\frac{2}{t^2}\middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+1}, ..., \frac{d}{2} - a_d \\ \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+2}, ..., \frac{d-1}{2} - a_d \end{matrix}\right),$$

где $G_{p,q}^{m,n}\left(x\middle| \begin{matrix} s_1,...,s_n;s_{n+1},...,s_p \\ t_1,...,t_m;t_{m+1},...,t_q \end{matrix}\right)$ – G-функция Мейера порядка (m,n,p,q).

В главе 3 также предложен алгоритм симулирования случайных векторов с плотностью (2). Для $k = 1,...,N$ независимо осуществляется процедура:

1. Производится независимое поэлементное симулирование нижней треугольной $d \times d$ матрицы L. Диагональные элементы имеют плотность

$$f_{l_{jj}}(l_{jj}) = 2\Gamma\left((2a_{d-j+1} - d + j)/2\right)^{-1} l_{jj}^{(2a_{d-j+1}-d+j)-1} \exp\left(-l_{jj}^2\right),$$

соответствующую обобщенному гамма-распределению с параметрами $a = 1,\ p = 2,\ d = 2a_{d-j+1} - d + j$, а для $i \neq j$ имеем $l_{ij} \sim N\left(0,1/2\right)$.

2. Независимо от шага 1 симулируется d-мерный вектор $V \sim N_d(0, I_d)$.

3. Вектор $X^{(k)}$ с распределением (2) вычисляется как $X^{(k)} = PL^{-1}V + \mu$, где P – нижняя треугольная $d \times d$ матрица, такая что $A = PP'$.

В ***четвертой главе*** в многомерное t-распределение с вектором степеней свободы вводится вектор параметров асимметрии, что позволяет учитывать индивидуальную скошенность маргинальных распределений доходностей. Использована процедура, основанная на различном масштабировании положительных и отрицательных значений.[34] Для ее применения требуется, чтобы у исходного распределения вероятностная масса каждого из ортантов была одинакова. Для плотности (2) в общем виде это условие может быть нарушено, поэтому предполагается $A = \mathrm{diag}(A_1, ..., A_d)$, где $A_i > 0,\ i = 1, ..., d$. При этом предположении применение упомянутой процедуры к (2) приводит к

$$f_X^s(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} |A|^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{d} \frac{\xi_i}{1+\xi_i^2} \left(1 + \frac{1}{2} x^{*[d-i+1]\prime} \left(A^{[d-i+1]}\right)^{-1} x^{*[d-i+1]}\right)^{b_{i-1}-b_i}, \tag{5}$$

где $x^* = (x_1^*, ..., x_d^*)'$, $x_i^* = (x_i - \mu_i)\xi_i^{I_i}$, $I_i = \begin{cases} -1, & \text{если } x_i \ge \mu_i \\ 1, & \text{если } x_i < \mu_i \end{cases}$, $i = 1, ..., d$.

Параметрами здесь являются $\mu \in \mathbb{R}^d$, $A = \mathrm{diag}(A_1, ..., A_d)$ с $A_i > 0$ для $i = 1, ..., d$, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_d)'$ с $\xi_i > 0$ для $i = 1, ..., d$ и $a = (a_1, ..., a_d)'$ с ограничениями из главы 3.

Распределение (5) назовем многомерным *t*-распределением с вектором параметров асимметрии и вектором степеней свободы. Случай $\xi_i > 1$ соответствует положительной, а $\xi_i < 1$ – отрицательной скошенности по X_i.

Распределение (5) может применяться в VAR-MGARCH моделях вида

$$r_t = E_{t-1} r_t + \varepsilon_t = c + Q r_{t-1} + \varepsilon_t = c + Q r_{t-1} + H_t^{1/2} X,$$

где r_t – d-мерный вектор доходностей, c и Q – d-мерный вектор и $d \times d$ матрица соответственно, H_t – условная ковариационная матрица вектора шоков ε_t с точностью до умножения на положительно определенную матрицу, а ковариационная матрица вектора X постоянна. Для H_t может использоваться любая MGARCH модель. Пусть X имеет плотность (5) с $\mu = 0$ и $A = I_d$ – это позволяет учитывать различия асимметрии и эксцессов для разных активов.

В ***пятой главе*** с помощью теоремы Скляра[35] построена стандартизованная *t*-копула с вектором степеней свободы. Копула на основе (3) имеет вид:

$$C_a^t(u_1, ..., u_d) = C \int_{-\infty}^{F_{X_1}^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{F_{X_d}^{-1}(u_d)} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2} x_1^2 + ... + \frac{1}{2} x_{d-j}^2\right)^{b_j - b_{j+1}} dx_1 ... dx_d, \tag{6}$$

[34] Предложена в [Bauwens, Laurent, 2005].

[35] См., например, Благовещенский, Ю.Н. Основные элементы теории копул // *Прикладная эконометрика*. 2012. Т. 26 (2). С. 113-130.

где маргинальные функции распределения – уже однократные интегралы вида

$$F_{X_j}(x_j) = C_j \int_{-\infty}^{x_j} {}_jF_{j-1}\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}, \ldots, a_d - \frac{d-2}{2}; a_{d-j+2} - \frac{d-j-1}{2}, \ldots, a_d - \frac{d-3}{2}; -\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad (7)$$

$$C_j = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \dfrac{d-j-1}{2}\right)}{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \dfrac{d-j}{2}\right)} \prod_{k=d-j+2}^{d} \frac{\Gamma\left(a_k - \dfrac{k-2}{2}\right)^2}{\Gamma\left(a_k - \dfrac{k-3}{2}\right)\Gamma\left(a_k - \dfrac{k-1}{2}\right)}.$$

Для вектора центрированных и нормированных шоков X в моделях VAR-MGARCH можно использовать копулу (6), то есть функцию плотности

$$\tilde{f}_X(x_1, \ldots, x_d) = C \prod_{j=1}^{d} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\left(F_{X_1}^{-1}(\tilde{F}_{X_1}(x_1))\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\left(F_{X_{d-j+1}}^{-1}(\tilde{F}_{X_{d-j+1}}(x_{d-j+1}))\right)^2\right)^{b_{j-1}-b_j} \tilde{f}_{X_j}(x_j)}{f_{X_j}(F_{X_j}^{-1}(\tilde{F}_{X_j}(x_j)))},$$

где $f_{X_j}(x_j)$ и $F_{X_j}(x_j)$ для $j = 1, \ldots, d$ определяются из (4) и (7) соответственно, а $\tilde{f}_{X_j}(x_j)$ и $\tilde{F}_{X_j}(x_j)$ для $j = 1, \ldots, d$ задаются отдельно.

В ***заключении*** суммируются результаты диссертации и приводятся возможные направления дальнейшей работы.

III. Основные выводы по результатам исследования

1. Проведено эмпирическое сравнение некоторых известных вероятностных моделей для доходностей мировых фондовых индексов и недавно предложенной вероятностной модели на основе многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы. С помощью теста на основе информационного критерия Кульбака – Лейблера получен следующий рейтинг распределений: 1 – многомерные *t*-распределения со скаляром и вектором степеней свободы, 2 – многомерное обобщенное распределение ошибки, 3 – многомерное распределение Грама – Шарлье. Показано, что многомерное *t*-распределение с вектором степеней свободы в некоторых случаях более предпочтительно, чем классическое многомерное *t*-распределение.
2. Построены модели для доходностей акций российских компаний на основе многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы, а также классического многомерного *t*-распределения и многомерного нормального

распределения. С их помощью составлены различные финансовые портфели. Показано, что для портфелей с минимальной дисперсией доходности построенные модели в целом эквивалентны, то есть дают близкие фактические значения средней доходности и волатильности. Для портфелей с минимальной дисперсией при заданной ожидаемой доходности многомерное нормальное распределение обеспечивает минимальную фактическую волатильность, а многомерное *t*-распределение с вектором степеней свободы – максимальную фактическую среднюю доходность при использовании наиболее ликвидных акций. Наконец, для портфелей с максимальной ожидаемой доходностью при заданной дисперсии многомерное нормальное распределение обеспечивает максимум фактической средней доходности, а многомерное *t*-распределение с вектором степеней свободы – минимум фактической волатильности в большинстве случаев.

3. Для многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы выведена общая формула моментов с условиями существования, формулы одномерных маргинальных функций плотности и характеристических функций, а также предложен алгоритм симулирования.

4. Предложена модификация стандартизованной версии многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы, которая предусматривает введение вектора параметров асимметрии в данное распределение. Показаны преимущества применения данной модификации в финансовых приложениях.

5. Построена копула на основе стандартизованного многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы, которая позволяет более гибко моделировать различия хвостовых зависимостей между компонентами случайного вектора, чем классическая *t*-копула. Приведена возможная схема применения построенной копулы.

IV. Публикации по теме диссертации

Работы, опубликованные автором в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ:

1. Балаев А.И. Анализ многомерных временных рядов финансовых доходностей: сравнение различных подходов к моделированию тяжелых хвостов // Экономический журнал Высшей школы экономики, 2013. – № 2(17). – С. 239–263. (1 п.л.)
2. Балаев А.И. Копула на основе многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы // Прикладная эконометрика, 2014. – № 1(33). – С. 90–110. (0,9 п.л.)
3. Балаев А.И. Многомерное скошенное *t*-распределение с вектором степеней свободы и его применение в моделях финансовых рынков // Прикладная эконометрика, 2011. – № 3(23). – С. 79–97. (0,8 п.л.)

Другие работы, опубликованные автором по теме диссертации:

4. Балаев А.И. Моделирование доходностей и составление портфелей из акций российских компаний / Препринты Издательского дома ВШЭ. Серия WP2 «Количественный анализ в экономике», 2013. – №03. – 48 С. (2 п.л.)
5. Балаев А.И. Моменты многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы, одномерные маргинальные функции плотности и характеристические функции / Препринты Издательского дома ВШЭ. Серия WP2 «Количественный анализ в экономике», 2012. — №03. — 36 С. (1,5 п.л.)
6. Балаев А.И. Применение многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы при анализе финансовых временных рядов // В кн.: Сборник трудов научно-практической конференции «Эконометрические методы в исследовании глобальных экономических процессов». М.: Анкил, 2013. С. 240–249. (0,4 п.л.) (в соавторстве со Шведовым А.С., вклад автора – 0,3 п.л.)
7. Balaev A.I. Modelling Financial Returns and Portfolio Construction for the Russian Stock Market // International Journal of Computational Economics and Econometrics, 2014. – № 1/2(4). – С. 32–81. (2,1 п.л.)

Балаев Алексей Иванович

СОСТАВЛЕНИЕ ПОРТФЕЛЕЙ ЦЕННЫХ БУМАГ НА ОСНОВЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОВМЕСТНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДНОСТЕЙ

Специальность: 08.00.13
«Математические и инструментальные методы экономики»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Заказ № Объем 1 п.л. Тираж 100 экз.

ЦЭМИ РАН